



دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی برق

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
مهندسی برق - گرایش مخابرات سیستم

تخمین زاویه ورود سیگنال با اندازه و علامت فاز
خروجی سنسورها

نگارش

محمدرضا دلبری

استاد راهنما

دکتر فرخ مروستی

خرداد ۱۴۰۱

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده‌ی مهندسی برق

پایان‌نامه کارشناسی ارشد در رشته مهندسی برق - مخابرات سیستم

عنوان:

تخمین زاویه ورود سیگنال با اندازه و علامت فاز خروجی سنسورها

نگارش: محمدرضا دلبری

این پایان‌نامه در تاریخ ۱۴۰۱/۰۳/۳۰ در مقابل هیأت داوران دفاع گردید و مورد تصویب قرار گرفت.

استاد راهنما: دکتر فرخ مروستی

امضاء:

عضو هیأت داوران: دکتر هادی زیانی

امضاء:

عضو هیأت داوران: دکتر آرش امینی

امضاء:

تقدیم به

خانواده‌ام

که پس از یزدان پاک، عزیزترین‌های من هستند.

چکیده

تخمین زاویه ورود سیگنال (DOA)^۱ کاربردهای بسیاری در حوزه‌های مختلف از جمله مخابرات بی‌سیم و پردازش سیگنال پزشکی دارد. بسیاری از روش‌های سنتی بدون استفاده از گسسته‌سازی زاویه ورود سیگنال به حل این مسئله پرداخته‌اند اما در دهه‌های اخیر برتری روش‌هایی که از گسسته‌سازی زاویه ورود سیگنال استفاده می‌کنند، به اثبات رسیده‌است. علاوه بر آن، در برخی شرایط، به دلیل وجود خطای فازی ما نیاز داریم به روش‌هایی که از مقادیر اندازه خروجی‌ها استفاده می‌کنند روی بیاوریم. حل این مسئله توسط فقط اندازه خروجی سنسورها از سال ۲۰۱۵ برای اولین بار بیان شد و با گذشت زمان روش‌های جدیدتری بیان شدند. در اکثر کارهای قبلی وجود سیگنال مرجع الزامی بوده است، اما در این پایان‌نامه با استفاده از اطلاعات علامت فاز خروجی سنسورها، علاوه بر اینکه دیگر به سیگنال مرجع نیازی نیست، بهبود عملکرد را در مقابل سایر کارها مشاهده می‌کنیم. به علت وجود خطای فازی در سنسورها، نیاز به پیدایش الگوریتم‌های تخمین ناهمدوس زاویه ورود سیگنال (NDOA)^۲ ایجاد شد که چون در این مقاله فقط از علامت فاز سنسورها استفاده می‌شود، تا حدود خوبی خروجی این علامت‌ها مستقل از خطای فازی سنسورهاست.

همچنین الگوریتم جدیدی با استفاده از حالت خاصی از روش کمینه‌سازی بیشینه‌سازی (MM)^۳ جهت حل این مسئله ارائه شده و شرایط کافی جهت برقراری الزامات این روش بررسی شده‌است. شایان ذکر است که در این ایده نیازی به دانستن تعداد سیگنال‌های ورودی، برخلاف بعضی کارهای قبلی، نیست. بعضی اثبات‌ها در میانه این رساله و بعضی اثبات‌ها به عنوان پیشنهاد در پیوست بیان شده‌است. نتایج شبیه‌سازی نیز ارائه شده‌است و در بعضی شرایط کاملاً بهتر از سایر الگوریتم‌ها کار می‌کند. نتایج شبیه‌سازی‌ها با معیارهای جذر میانگین مربعات خطا (RMSE)^۴ و درصد موفقیت در بازیابی درست تعداد سیگنال‌های ورودی مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. نتایج در قالب مقاله به ژورنال ارسال شد و پذیرفته شده‌است [۱۶].

واژه‌های کلیدی:

- | | |
|------------------------------------|-----------------------------|
| ۱- تخمین ناهمدوس زاویه ورود سیگنال | Non-coherent DOA estimation |
| ۲- بازیابی تنک | Sparse recovery |
| ۳- کمینه‌سازی بیشینه‌سازی | Majorization minimization |
| ۴- علامت فاز | Sign of phase |

¹Direction Of Arrival

²Non-coherent Direction Of Arrival

³Majorization Minimization

⁴Root Mean Square Error

فهرست مطالب

۱	مقدمه	۱
۲	هدف رساله و نوآوری آن	۱.۱
۳	ساختار رساله	۱.۲
۴	آشنایی با مسئله و مقدمات	۲
۴	مقدمه	۲.۱
۴	بازیابی سیگنال‌های تنک	۲.۲
۶	روش کمینه‌سازی بیشینه‌سازی	۲.۳
۷	بیان مسئله تخمین زاویه ورود سیگنال	۲.۴
۱۰	فرمول‌بندی مسئله بدون گسسته‌سازی زاویه ورود سیگنال	۲.۵
۱۱	فرمول‌بندی مسئله با گسسته‌سازی زاویه ورود سیگنال	۲.۶
۱۱	تخمین همدوس زاویه ورود سیگنال	۲.۶.۱
۱۲	تخمین ناهمدوس زاویه ورود سیگنال	۲.۶.۲
۱۳	ابهامات روش‌های ناهمدوس تخمین زاویه ورود سیگنال	۲.۷
۱۴	جمع‌بندی مطالب فصل	۲.۸
۱۵	روش‌های تخمین ناهمدوس زاویه ورود سیگنال	۳
۱۵	مقدمه	۳.۱
۱۵	روش‌هایی که از سیگنال مرجع استفاده می‌کنند	۳.۲
۱۵	روش GESPAR [۱۳]	۳.۲.۱
۱۶	روش مبتنی بر تخمین فرکانسی	۳.۲.۲
۱۷	باند پایین خطا	۳.۲.۳
۱۷	روش‌هایی که از سیگنال مرجع استفاده نمی‌کنند	۳.۳
۱۷	روش TOYBAR [۱۵]	۳.۳.۱
۱۸	جمع‌بندی مطالب فصل	۳.۴

۱۹	۴	روش پیشنهادی
۱۹	۴.۱	مقدمه
۱۹	۴.۲	ایده اصلی
۲۳	۴.۳	آنالیز پیچیدگی
۲۴	۴.۴	نتایج شبیه سازی
۳۱	۴.۵	جزئیات الگوریتم
۳۱	۴.۵.۱	شرایط اولیه
۳۲	۴.۵.۲	به روز رسانی پارامترها
۳۲	۴.۶	بررسی چند قضیه برای حالت خاص
۳۵	۴.۷	جمع بندی مطالب فصل
۳۶	۵	نتیجه گیری و پیشنهادات
۳۷	۵.۱	پیشنهادهایی برای پژوهش های آینده
۳۸		پیوست ها
۳۹	آ	شرط کافی برای L_{min}
۴۱	ب	اثبات قضیه ۲.۴
۴۳	ج	پیدا کردن L_{min} مناسب
۴۵		مراجع

فهرست تصاویر و نمودارها

۲	DOA در مخبرات نسل پنجم	۱.۱
۶	Majorization Minimization method.	۲.۱
۷	موج صفحه‌ای تابیده شده به آرایه‌ای از سنسورها	۲.۲
۸	سنسورها در سه بعد	۲.۳
۸	آرایه خطی از سنسورها	۲.۴
۱۱	مقایسه روش IMAT با سایر روش‌هایی که از تنکی استفاده نمی‌کنند.	۲.۵
۱۲	قالب مسئله DOA بر پایه تنکی سیگنال	۲.۶
۱۶	مثالی از استفاده سیگنال مرجع برای حل ابهام آینه ای	۳.۱
۱۷	CRB برای تخمین NDOA و DOA با تعداد ۱۰ سنسور و $SNR = 20dB$	۳.۲
۱۸	آرایه خطی دوتایی از سنسورها	۳.۳
۲۵	RMSE برحسب SNR های مختلف در شرایط خطای فازی صفر درجه و سیگنال‌های on-grid	۴.۱
۲۵	RMSE برحسب SNR های مختلف در شرایط خطای فازی صفر درجه و سیگنال‌های off-grid	۴.۲
۲۶	RMSE برحسب خطاهای فازی مختلف در $SNR=10$ dB که با توزیع گاوسی تولید شده اند.	۴.۳
۲۷	RMSE برحسب خطاهای فازی مختلف در $SNR=30$ dB که با توزیع گاوسی تولید شده اند.	۴.۴
۲۷	مقایسه بین MMSM و ToyBar در موفقیت بازیابی تعداد درست سیگنال های تابیده شده به سنسور ها.	۴.۵
۲۸	مقایسه بین MMSM و ToyBar در موفقیت بازیابی تعداد درست سیگنال های تابیده شده به سنسور ها.	۴.۶
۲۹	RMSE برحسب مقادیر مختلف M در SNR های مختلف	۴.۷
۲۹	RMSE برحسب خطاهای فازی مختلف در $SNR=15$ dB که با توزیع گاوسی تولید شده اند.	۴.۸
۳۰	تاثیر پارامتر α در موفقیت بازیابی تعداد سیگنال ورودی.	۴.۹
۳۰	مقایسه بین مقادیر مختلف λ در MMSM در موفقیت بازیابی تعداد درست سیگنال های تابیده شده به سنسور ها.	۴.۱۰

فهرست الگوریتم‌ها

۱۸		Algorithm Summary (ToyBar)	۱.۳
۲۳		Proposed algorithm (MMSM) for non-coherent DOA estimation	۱.۴

فهرست سرنام‌ها

DOA	Direction Of Arrival
NDOA	Non-coherent Direction Of Arrival
IMAT	Iterative Method with Adaptive Threshold
IHT	Iterative Hard Threshold
MM	Majorization-Minimization
MMSM	Majorization-Minimization with Sign Measurements
GESPAR	GrEedy Sparse PhAse Retrieval
TOYBAR	fasT grOup sparsitY Based phAse Retrieval
MUSIC	MUltiple SIgnal Classification
SNR	Signal to Noise Ratio
RMSE	Root Mean Square Error

فصل ۱

مقدمه

تخمین زاویه ورود سیگنال (DOA)^۱ یک مسئله بسیار مهم در کاربردهای بسیاری همچون رادار^۲ [۱]، سونار^۳ [۲]، مخابرات بی سیم^۴ [۳] و پردازش سیگنال پزشکی^۵ [۴] است. در این مسئله ما به دنبال پیدا کردن زاویه ورود سیگنال یا سیگنال‌های تابیده شده به آرایه‌ای از سنسورها هستیم. این مسئله می‌تواند در یک یا دو یا حتی سه بعد در نظر گرفته شود. در این رساله تمرکز بیشتر روی یک بعدی است اما نتیجه کار قابل تعمیم به بعدهای بالاتر نیز می‌باشد. برای کاربردی همچون در سونار، شرایط مسئله به طور کلی تغییر می‌کند چون فضای مسئله به جای هوا باید در آب بررسی بشود. برای مثال در کاربرد مخابرات، در اینترنت نسل پنجم^۶ برای آنکه مرکز ارسال داده^۷ بداند برای ارسال داده انرژی را در چه زوایایی متمرکز کند، با یک مسئله DOA روبه رو است (شکل (۱.۱).

بعضی الگوریتم‌های قدیمی بدون گسسته‌سازی فضا همچون MUSIC^۸ [۵]، MVDR^۹ [۶]، ESPRIT^{۱۰} [۷] هستند که این مسئله را حل کرده‌اند که در بخش ۲.۵ صرفاً با ساختار مسئله آنها آشنا می‌شوید و برای

¹Direction Of Arrival

²Radar

³Sonar

⁴Wireless Communication

⁵Biomedical signal processing

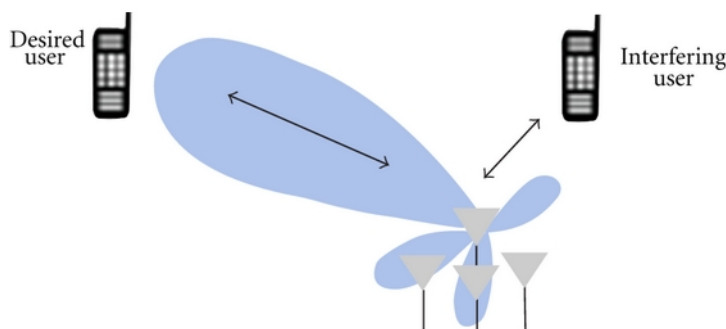
⁶5th Generation

⁷Base station

⁸MUltiple SIgnal Classification

⁹Minimum Variance Distortionless Response

¹⁰Estimation of Signal Parameters via Rotation Invariance Techniques



شکل ۱.۱: DOA در مخابرات نسل پنجم

جزئیات بیشتر در ارتباط با ایده حل مسئله آن‌ها می‌توانید به مقالات مرتبط رجوع کنید. در ادامه الگوریتم‌هایی بر مبنای تنکی سیگنال، که با گسسته‌سازی فضا، مسئله را حل می‌کردند ارائه شده‌است [۸]، [۹] (بخش ۲.۶). با این حال تمام این روش‌ها که آن‌ها را همدوس می‌نامیم وابسته به اطلاعات فازی درست سنسورها هستند، اما در عمل این اطلاعات فازی به دلایلی مانند خطای شیف‌دهنده‌های فاز، عدم دقت سنسورها و... دارای خطای فازی هستند [۱۰]، [۱۱]، [۱۲] و [۳]. در نتیجه برای اولین بار الگوریتمی ارائه شد که فقط به اندازه خروجی سنسورها وابسته بود و به ایجاد مبحث تخمین زاویه ورود سیگنال (NDOA)^{۱۱} منجر شد [۱۳]. در این کار از الگوریتم GESPAR^{۱۲} که در زیر زیربخش ۳.۲.۱ توضیح داده شده، استفاده شده‌است [۱۴]. یک ایراد اساسی این کار استفاده از سیگنال مرجع برای رفع ابهامی که ذاتاً در مسئله NDOA است، بود. در ادامه مقالات جدید با ایده‌های جدید برای حذف این سیگنال مرجع ارائه شدند [۱۵].

۱.۱ هدف رساله و نوآوری آن

در این رساله، الگوریتم جدیدی برای حل مسئله تخمین زاویه ورود سیگنال در شرایطی که خطای فازی داریم، با استفاده از اطلاعات علامت فازهای خروجی سنسورها، ارائه شده‌است. این الگوریتم نتایج بهتری نسبت به کارهای قبلی در برخی شرایط دارد. همچنین نتایج در قالب مقاله به ژورنال ارسال شد و پذیرفته شده‌است [۱۶].

¹¹Non-coherent Direction Of Arrival

¹²GrEedy Sparse PhAse Retrieval

۱.۲ ساختار رساله

در ادامه‌ی این رساله، ابتدا در فصل دوم جهت ورود به بحث و آشنایی خوانندگان محترم، مقدمات ریاضیات مسئله تخمین زاویه ورود سیگنال ارائه می‌شود. سعی بر آن است این معرفی به صورت کلی و بدون پرداختن به جزئیات و با زبان ساده انجام شود. همچنین در این فصل روش کمینه‌سازی بیشینه‌سازی و مفاهیم تنکی ارائه شده‌است.

تکیه بیشتر این رساله بر روش‌های تخمین ناهمدوس زاویه ورود سیگنال بر مبنای تنکی است در نتیجه در فصل سوم به الگوریتم‌هایی که این مسئله را با این روش حل می‌کنند، پرداخته شده‌است.

در فصل چهارم نوآوری این رساله همراه با اثبات ریاضی و نتایج شبیه‌سازی ارائه شده‌است. آنالیز پیچیدگی نیز انجام شده و جزئیاتی نیز در ارتباط با پارامترها بیان شده‌است. در انتها به بررسی چند قضیه در حالت خاصی از این الگوریتم پرداخته شده‌است.

فصل ۲

آشنایی با مسئله و مقدمات

۲.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا با کلیت مسئله DOA آشنا می‌شویم و سپس گریزی به چند روش قدیمی برای حل این مسئله خواهیم زد. فصل به دو بخش عمده بدون گسسته‌سازی زاویه‌های ورود و با گسسته‌سازی زاویه‌های ورود تقسیم‌بندی شده‌است. چون در این رساله تمرکز بیشتر روی استفاده از تنکی سیگنال است در نتیجه بخش گسسته‌سازی زاویه‌های ورود با جزییات بیشتری بیان شده‌است. در ادامه ابتدا با یک ابزار بهینه‌سازی با نام کمینه‌سازی بیشینه‌سازی آشنا می‌شویم و از آن در نوآوری این رساله استفاده می‌کنیم. سپس با بازیابی تنک سیگنال آشنا می‌شویم که از این مفهوم نیز در فصل ۴ استفاده می‌کنیم. در انتها به بررسی ابهاماتی که در روش‌های تخمین ناهمدوس زاویه ورود سیگنال رخ می‌دهد، می‌پردازیم.

۲.۲ بازیابی سیگنال‌های تنک

بازیابی سیگنال‌های تنک بیش از یک دهه است که محبوبیت ویژه‌ای در بسیاری از کاربردهای مخابراتی مانند کدگذاری منابع، جداسازی منابع، از بین بردن نویز و... پیدا کرده است. برای مثال به مسئله زیر توجه فرمایید:

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{n}, \quad (2.1)$$

در این مسئله اگر بعد بردار $\mathbf{r}$ برابر M و بعد بردار $\mathbf{x}$ برابر N باشد، و از طرفی بدانیم $M < N$ و رنک ماتریس $\mathbf{A}$ نیز M باشد و هیچ دو معادله‌ای باهم در تضاد نباشند، آنگاه به طور معمول این معادله بینهایت پاسخ دارد. حال فرض کنید بردار $\mathbf{x}$ k -sparse باشد به معنای زیر:

$$\|\mathbf{x}\|_0 \leq k, \quad (2.2)$$

$$\|\mathbf{x}\|_0 = \left\{ \sum_i |x_i|^0, \quad |x_i| \neq 0 \right\}. \quad (2.3)$$

که نشان دهنده‌ی تعداد درایه‌های غیر صفر بردار است. حال اگر بدانیم بردار $\mathbf{x}$ در رابطه ۲.۱ تنک است، می‌توان تابع هزینه‌ای را به شکل زیر تعریف کرد:

$$\text{Minimize} \quad \|\mathbf{r} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_0, \quad (2.4)$$

این مسئله به طور کلی یک مسئله حل نشدنی در زمان معقول (NP-hard)^۱ است [۱۷]. پاسخ تقریبی این مسائل به دو روش کلی حریص^۲، مانند OMP^۳ [۱۸] و تقریب نرم صفر با نرم‌های بالاتر^۴ محدب، مانند [۱۹] است. برخلاف این دو روش کلی در [۲۰] یک روش تکرارشونده^۵ ارائه شد. پاسخ نهایی به شکل زیر بود:

$$\mathbf{x}^{(n)} = H_{\sqrt{\lambda}}(\mathbf{x}^{(n-1)} + \mathbf{A}^H(\mathbf{r} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(n-1)})). \quad (2.5)$$

بعد از آن در [۲۱] مشابه همین پاسخ اما با آستانه متغیر بررسی شد که پاسخ بهتری هم داشت. از این ایده متغیر بودن آستانه در این رساله نیز استفاده شده است.

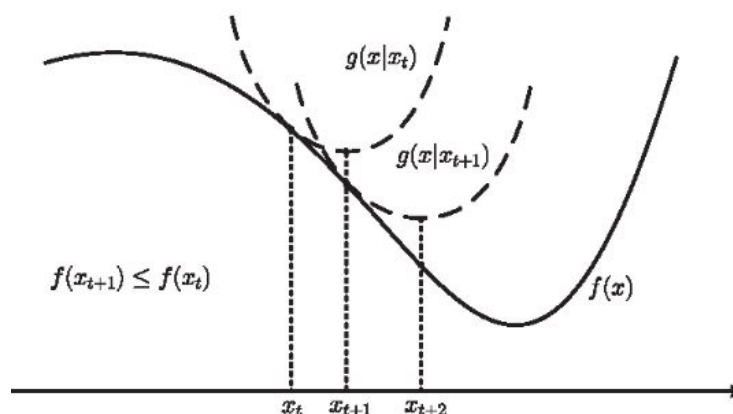
¹Non-deterministic Polynomial-time hard

²greedy

³Orthogonal Matching Pursuit

⁴Relaxation

⁵Iterative



شکل ۲.۱: Majorization Minimization method.

۲.۳ روش کمینه‌سازی بیشینه‌سازی

در این بخش با یک روش بهینه‌سازی با نام کمینه‌سازی بیشینه‌سازی (MM)^۶ آشنا می‌شویم. با استفاده از این روش، می‌توان سریع‌تر از روش گرادیان کاهش^۷ مینیمم محلی تابع را پیدا کرد. در هر گام با معرفی تابع جایگزین^۸ تضمین می‌شود که تابع هزینه ما غیرافزایشی است [۲۲]، [۲۳]:

$$f(\mathbf{x}_{t+1}) \leq g(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t) \leq g(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_t) = f(\mathbf{x}_t) \quad (2.6)$$

که در این رابطه $f(\mathbf{x})$ تابع هزینه اصلی ماست و t نشان دهنده گام هر مرحله است. تابع $g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_t)$ نیز تابع جایگزین در مرحله t است که دارای خواص زیر باید باشد:

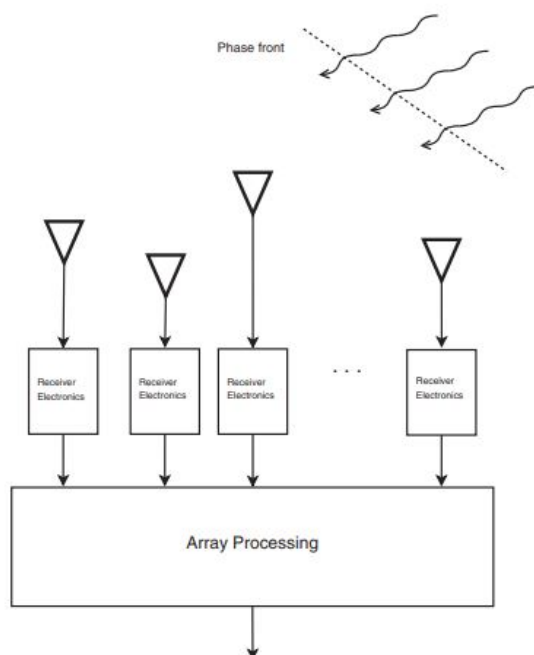
$$g(\mathbf{x}|\mathbf{x}_t) \geq f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x}, \quad (2.7)$$

$$g(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_t) = f(\mathbf{x}_t). \quad (2.8)$$

⁶Majorization Minimization

⁷gradient descend

⁸surrogate function



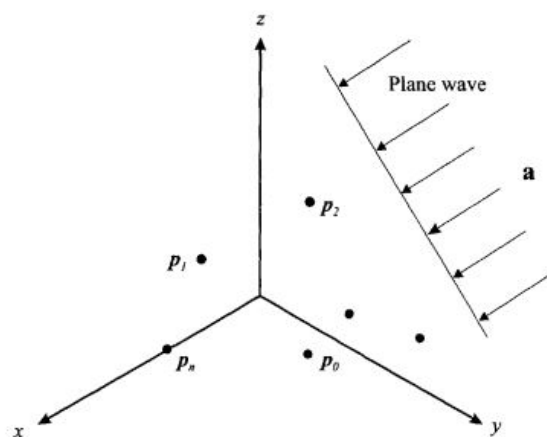
شکل ۲.۲: موج صفحه‌ای تابیده شده به آرایه‌ای از سنسورها

۲.۴ بیان مسئله تخمین زاویه ورود سیگنال

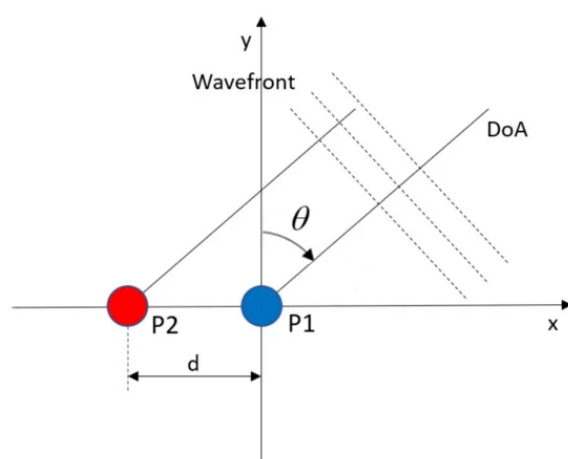
در این مسئله غایت نهایی پیدا کردن زاویه سیگنال یا سیگنال‌های تابیده شده به آرایه‌ای از سنسورهاست (شکل ۲.۲) [۲۴].

سنسورها می‌توانند در سه بعد به هر شکلی چیده شده باشند (شکل ۲.۳) اما در این رساله بیشتر تاکید روی آرایه خطی و یکنواخت از سنسورهاست مگر آنکه مشخصاً هندسه آن ذکر شود [۲۵]. با توجه به اطلاعاتی که هر سنسور دریافت می‌کند، پردازشی روی تمام این دیتاها انجام می‌شود و در نهایت زاویه ورود سیگنال‌ها تخمین زده می‌شود. در تمام روش‌هایی که در ادامه بحث خواهد شد، یک سنسور به عنوان مرجع انتخاب می‌شود و اختلاف فاز سایر سنسورها نسبت به آن سنسور مرجع سنجیده خواهد شد [۲۶]. برای مثال همانطور که از شکل ۲.۴ پیداست، اگر سنسور P_1 را به عنوان مرجع انتخاب کنید و ضریب آن را در ارتباط با تابیده شدن یک سیگنال در زاویه θ ، یک فرض کنیم برای سنسور P_2 داریم:

$$a_{1,\theta} = 1, \quad a_{2,\theta} = e^{-j2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta}. \quad (2.9)$$



شکل ۲.۳: سنسورها در سه بعد



شکل ۲.۴: آرایه خطی از سنسورها

و اگر تعداد سنسورها بیش از دوتا باشد برای سنسور P_m داریم:

$$a_{m,\theta} = e^{-j2\pi \frac{md}{\lambda} \sin \theta}. \quad (2.10)$$

در نتیجه، سیگنالی که در گیرنده m دریافت می‌شود برابر است با:

$$r_m = a_{m,\theta} x_\theta(t) + n_m(t), \quad (2.11)$$

و در صورتی که K سیگنال از زوایای مختلف همزمان بتابند، در گیرنده m داریم:

$$r_m(t) = \sum_{k=1}^K a_{m,\theta_k} x_{\theta_k}(t) + n_m(t). \quad (2.12)$$

که در آن $n_m(t)$ نشان‌دهنده نویز گیرنده m ام و $x_k(t)$ سیگنال k ام را در زمان نشان می‌دهد. همچنین در این روابط λ طول موج سیگنال تابیده شده ($\lambda = \frac{c}{f}$) که c سرعت نور در خلا و f فرکانس سیگنال تابیده شده است و چون در تمام این رساله فرض بر تک فرکانس بودن سیگنال‌ها است در نتیجه λ مقدار ثابتی است) و d فاصله بین دو سنسور می‌باشد. در تخمین همدوس زاویه ورود سیگنال، با همین اختلاف فاز بین سنسورها می‌توان زاویه ورود یک تک سیگنال را تخمین زد اما تخمین ناهمدوس ابهاماتی دارد که در جلوتر به آن‌ها می‌پردازیم. در شرایطی که خطای فازی وجود دارد، الگوریتم‌های تخمین همدوس DOA از یک نقطه به بعد کارایی خود را به طور کلی از دست می‌دهند (که وابسته به SNR^۹ است) اما الگوریتم‌های ناهمدوس نسبت به این خطا مقاوم هستند [۱۳]. تا پایان این رساله، کل بازه زاویه ورود را از -90° تا 90° در نظر می‌گیریم.

^۹Signal to Noise Ratio

۲.۵ فرمول‌بندی مسئله بدون گسسته‌سازی زاویه ورود سیگنال

در این بخش ابتدا با ریاضیات مسئله آغاز می‌کنیم و سپس به بیان کوتاه ایده هر کدام از روش‌ها می‌پردازیم. اگر از رابطه ۲.۱۲ در زمان نمونه‌برداری کنیم، برای یک نمونه زمانی، می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta_1) & \dots & \mathbf{a}(\theta_K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_M \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

که به طور خلاصه:

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{n}, \quad (2.14)$$

که در آن بردار $\mathbf{r}$ مشاهدات، بردار $\mathbf{x}$ سیگنال‌های تابیده شده به سنسورها، ماتریس $\mathbf{A}$ ضرایب سنسورها (با توجه به رابطه ۲.۱۰)، که بر حسب زوایای θ_1 تا θ_K می‌باشد و بردار $\mathbf{n}$ نشان دهنده نویز است. تعداد سیگنال‌ها را هم با K نشان داده‌ایم. در این مسئله هدف پیدا کردن زوایای θ_1 تا θ_K است.

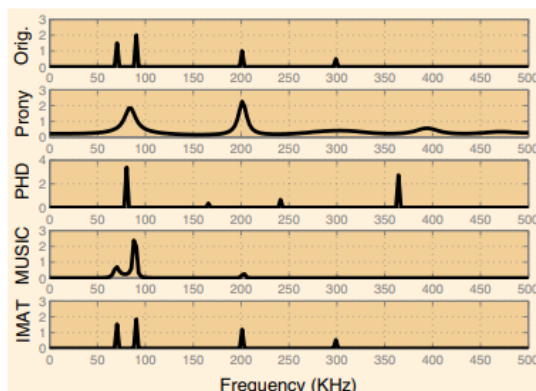
یکی از قدیمی‌ترین روش‌های حل این مسئله، روش MUSIC بوده است که از ناهمبستگی سیگنال نویز و سیگنال ورودی استفاده می‌کند و با محاسبه ماتریس کوواریانس بردار مشاهدات تخمین DOA را انجام می‌دهد [۵].

$$R_{\mathbf{r}} = E\{\mathbf{r}\mathbf{r}^H\} = E\{\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}^H\mathbf{A}^H\} + E\{\mathbf{n}\mathbf{n}^H\} = \mathbf{A}R_{\mathbf{x}}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I}, \quad (2.15)$$

سپس با توجه به مقادیر ویژه ماتریس $R_{\mathbf{r}}$ و یک سری قضایا، تعداد سیگنال‌های ورودی یعنی K را محاسبه می‌کند و در آخر با توجه به رابطه زیر زوایا را می‌یابد:

$$P_{MUSIC}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{E}_N\mathbf{E}_N^H\mathbf{a}(\theta)}, \quad (2.16)$$

که در آن $\mathbf{E}_N$ ماتریسی $M \times N$ است که ستون‌های آن N پایه زیر فضای نویز است و $N = M - K$. همچنین



شکل ۲.۵: مقایسه روش IMAT با سایر روش‌هایی که از تنکی استفاده نمی‌کنند.

$a(\theta)$ برداری است که درایه‌های آن با توجه به رابطه ۲.۱۰ پر می‌شوند. از روش‌های دیگر می‌توان به ESPRIT اشاره کرد [۷]. این روش تقریباً از همان ایده الگوریتم MUSIC استفاده می‌کند ولی با ایده‌هایی جدید باعث کاهش حجم محاسبات شده‌است. از آنجا که هدف اصلی این رساله تخمین NDOA با استفاده از تنکی^{۱۰} است، بیش از این، این بخش را توضیح نمی‌دهیم و برای جزئیات بیشتر می‌توانید به مقالات مربوطه مراجعه کنید.

۲.۶ فرمول‌بندی مسئله با گسسته‌سازی زاویه ورود سیگنال

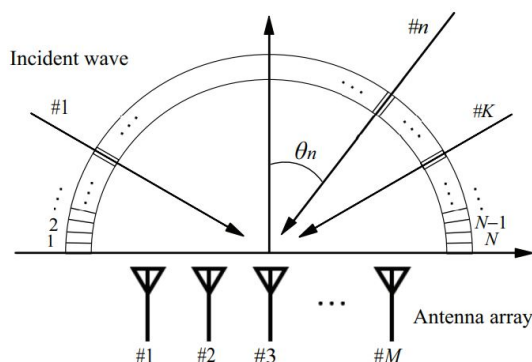
در این بخش، ریاضیات تعریف مسئله را برای تخمین زاویه ورود سیگنال به صورت همدوس و غیر همدوس بیان می‌کنیم. روش‌هایی که بر مبنای گسسته‌سازی زاویه ورود سیگنال هستند معمولاً دقت بالاتر و حجم محاسبات کمتری دارند. همچنین این روش‌ها به تعداد نمونه کمتری نیاز دارند. برای مثال در شکل ۲.۵ دقت روش‌های مختلف مقایسه شده‌است. همان‌طور که دیده می‌شود، روش IMAT^{۱۱} نسبت به بقیه روش‌ها دقت بهتری دارد [۲۷].

۲.۶.۱ تخمین همدوس زاویه ورود سیگنال

چون تمرکز اصلی این رساله بر روی مسئله تخمین NDOA است، در این بخش فقط به توضیحات مختصری بسنده می‌کنیم و فقط کمی با حل مسئله تخمین DOA با استفاده از مفهوم تنکی سیگنال می‌پردازیم. همان‌طور که از شکل ۲.۶ پیداست، ما زاویه‌های ورود را به N قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. حال اگر در هر کدام از این

¹⁰Sparsity

¹¹Iterative Method with Adaptive Threshold



شکل ۲.۶: قالب مسئله DOA بر پایه تنکی سیگنال

نواحی سیگنالی وجود نداشت، درایه معادل آن در بردار $\mathbf{x}$ صفر است. با توجه به شکل اگر تعداد سیگنال‌ها را K بگیریم و این تعداد از N خیلی کمتر باشد، فرض تنکی سیگنال درست است و می‌توانیم از مفاهیم آن برای حل این مسئله استفاده کنیم (مقایسه بعضی از روش‌ها مبتنی بر تنکی مانند ^{12}HQR ، $^{13}\text{FISTA}$ و OMP در [۲۸]). با توجه به N و M و همین‌طور هندسه آرایه‌ها می‌توان ماتریس $\mathbf{A}$ را تشکیل داد. برای یک آرایه خطی یکنواخت داریم:

$$\mathbf{a}_i^T = [e^{-j2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta_0}, \dots, e^{-j2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta_{N-1}}], \quad (2.17)$$

$$\theta_n = \frac{n}{N} \times 180, \quad n = 0, \dots, N-1$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_0 | \mathbf{a}_1 | \dots | \mathbf{a}_{M-1}]^T. \quad (2.18)$$

۲.۶.۲ تخمین ناهمدوس زاویه ورود سیگنال

همان‌طور که در مقدمه گفته شد به دلیل وجود خطای فازی در بسیاری از کاربردها، به الگوریتم‌های تخمین NDOA روی می‌آوریم. تفاوتی که این مسئله با مسئله قبل دارد در این است که اینجا بردار مشاهدات ما اندازه خروجی سنسورها است. به جای رابطه ۲.۱، اکنون رابطه زیر برای ما اهمیت دارد:

$$\mathbf{y} = |\mathbf{Ax} + \mathbf{n}|^2, \quad (2.19)$$

¹²Half-Quadratic Regularization

¹³Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm

دوباره با فرض تنک بودن سیگنال x تابع هزینه زیر را می‌نویسیم:

$$\text{Minimize} \quad \|y - |Ax|^2\|_2^2 + \lambda \|x\|_0. \quad (2.20)$$

ماتریس A اینجا نیز به همان شکل روابط ۲.۱۷ و ۲.۱۸ تعریف می‌شود. در فصل بعد به روش‌های مختلف جهت حل این مسئله می‌پردازیم.

۲.۷ ابهامات روش‌های ناهمدوس تخمین زاویه ورود سیگنال

یک تفاوت اصلی این مسئله با مسئله قبل وجود یک ابهام ذاتی در آن است که با یک مثال توضیح می‌دهیم. تصور کنید فقط دو سیگنال ورودی داریم (برای راحتی بدون نویز فرض می‌کنیم و $\psi_n = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_n$). در خروجی سنسور y داریم:

$$y_i = |x_1| e^{j id \psi_1 + \gamma_1} + |x_2| e^{j id \psi_2 + \gamma_2} \quad |^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + 2|x_1||x_2| \cos(id\Delta\psi + \Delta\gamma), \quad (2.21)$$

که در آن γ فاز سیگنال‌ها و $\Delta\psi = \psi_1 - \psi_2$ و $\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ می‌باشند. حتی اگر فرض کنیم

$$|x_1| = |x_2| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{داریم:}$$

$$y_i = 1 + \cos(id\Delta\psi + \Delta\gamma), \quad (2.22)$$

برای حل این رابطه دو ابهام وجود دارد که شیفت فاز^{۱۴} و آینه‌ی فاز^{۱۵} نام دارند. ابهام شیفت فاز ریشه در این دارد که اگر پاسخ $\Delta\psi$ را پیدا کردیم، نمی‌توانیم بگوییم پاسخ برای دو سیگنال به ازای چه δ_ψ رخ داده است:

$$\Delta\psi = (\psi_1 + \delta_\psi) - (\psi_2 + \delta_\psi). \quad (2.23)$$

ابهام آینه‌ای ریشه در زوج بودن تابع کسینوس دارد چون پاسخ می‌تواند هم $(id\Delta\psi + \Delta\gamma)$ باشد هم

$-(id\Delta\psi + \Delta\gamma)$. در فصل بعد ایده‌هایی برای رفع این ابهام‌ها بررسی شده است.

¹⁴phase shift

¹⁵phase mirroring

۲.۸ جمع‌بندی مطالب فصل

در این فصل سعی بر آن بود که خوانندگان محترم با کلیات مسئله DOA آشنا شوند. همچنین با دو مفهوم MM و بازیابی تنک آشنا شدیم و از این مفاهیم در فصل ۴ استفاده خواهیم کرد. همچنین با مفهوم گسسته‌سازی زاویه ورود سیگنال آشنا شدیم که این روش‌ها بهتر از روش‌های قدیمی‌تر که بدون گسسته‌سازی زاویه ورود کار می‌کردند، هستند. در فصول بعد تمرکز روی روش‌های تخمین ناهمدوس زاویه ورود سیگنال می‌باشد.

فصل ۳

روش‌های تخمین ناهمدوس زاویه ورود سیگنال

۳.۱ مقدمه

در این فصل تمرکز ما روی روش‌های موجود برای تخمین NDOA است. ابتدا در بخش ۳.۲ به توضیح الگوریتم‌هایی می‌پردازیم که در آن‌ها از سیگنال مرجع^۱ برای رفع ابهامی که در ۲.۷ اشاره شد، استفاده شده است. سپس در بخش ۳.۳ الگوریتم‌هایی که در آن‌ها از سیگنال مرجع استفاده نشده است می‌پردازیم.

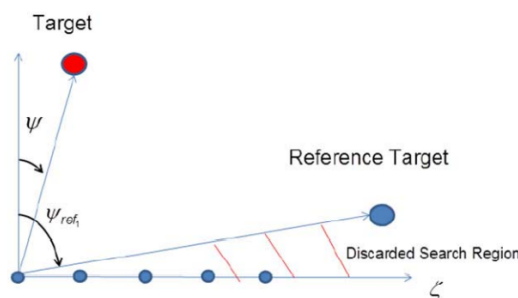
۳.۲ روش‌هایی که از سیگنال مرجع استفاده می‌کنند

۳.۲.۱ روش GESPAR [۱۳]

در این بخش به بررسی ایده [۱۳] با عنوان GESPAR برای حل این ابهام می‌پردازیم. تصور کنید یک سیگنال مرجع در ψ_{ref} قرار می‌دهیم. همان طور که از رابطه ۲.۲۳ استخراج می‌شود، داریم:

$$\psi_1 = \psi_{ref}, \quad \delta\psi = 0, \quad (3.1)$$

¹reference signal



شکل ۳.۱: مثالی از استفاده سیگنال مرجع برای حل ابهام آینه ای

که این ابهام شیفت فاز را حل می‌کند. برای حل ابهام آینه ای، این سیگنال مرجع را در یک طرف فضا (برای مثال $\theta = 90$ یا $\theta = -90$) قرار می‌دهیم و این مشکل نیز حل می‌شود (شکل ۳.۱).

با این حال تک سیگنال مرجع فقط زمانی کارایی دارد که فقط یک سیگنال هدف داشته باشیم. در صورتی که سیگنال‌های هدف بیشتری داشته باشیم باید به تعداد آن‌ها سیگنال مرجع داشته باشیم تا مسئله حل شود. همین مسئله به طور ذاتی دو مشکل را ایجاد می‌کند:

۱- الگوریتم به تعداد سیگنال‌های هدف ورودی وابسته است،

۲- با افزایش تعداد سیگنال‌های ورودی، تعداد سیگنال‌های مرجع نیز افزایش می‌یابد.

۳.۲.۲ روش مبتنی بر تخمین فرکانسی

ایده‌ای که در این بخش بررسی شده است، Non-Coherent DOA Estimation via Frequency Estimation است که با طیف فرکانسی به حل مسئله می‌پردازد. می‌دانیم خروجی سنسور i ام عبارت زیر است:

$$y_i = \sum_{k=1}^K \sum_{k'=1}^K \left(|x_{i,k}| |x_{i,k'}| e^{j2\pi \frac{d}{\lambda} (\sin \theta_k - \sin \theta_{k'})} e^{j(\gamma_{i,k} - \gamma_{i,k'})} \right), \quad (3.2)$$

که شامل یک پارامتر ثابت^۲ و به تعداد $\frac{K(K+1)}{2}$ هارمونیک در فرکانس‌های مختلف است. در نتیجه اگر یک سیگنال مرجع با دامنه بزرگ قرار دهیم، در حوزه FFT با استفاده از K تا از بزرگ‌ترین پیک‌هایی که ایجاد می‌شود مسئله حل می‌شود (شرایط روی اندازه بزرگی سیگنال مرجع و جزئیات بیشتر در [۲۹]).

^۲DC

۳.۲.۳ باند پایین خطا

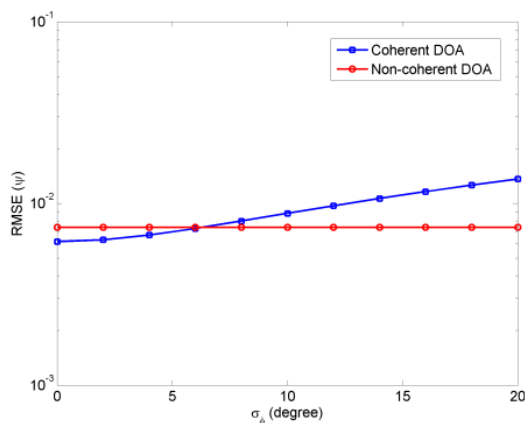
این مقاله با نام Cramer-Rao Bound for Non-Coherent DOA estimation یک باند پایین برای مسئله تخمین NDOA به صورت تئوری در آورده شده است که خروجی آن در شکل ۳.۲ قابل مشاهده است. همان‌طور که از شکل پیداست با افزایش خطای فازی که به صورت توزیع گاوسی تولید شده است، RMSE^۳ الگوریتم تخمین NDOA برخلاف تخمین DOA تغییری نمی‌کند و به آن وابسته نیست.

۳.۳ روش‌هایی که از سیگنال مرجع استفاده نمی‌کنند

۳.۳.۱ روش TOYBAR [۱۵]

این روش با نام TOYBAR^۴ بدون استفاده از سیگنال مرجع و بدون نیاز به دانستن تعداد سیگنال‌های ورودی، فقط با تغییر هندسه آرایه‌ها به حل ابهاماتی که بیان شد، می‌پردازد. همان‌طور که از شکل ۳.۳ پیداست دو سری آرایه خطی یکنواخت از سنسورها با زاویه $\hat{\theta}$ کنار هم چیده شده‌اند و یک سنسور بین آن‌ها مشترک است. تابع هزینه‌ای که در [۱۵] حل شده است:

$$||\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \rho\|\mathbf{x}\|_1, \quad (۳.۳)$$



شکل ۳.۲: CRB برای تخمین DOA و NDOA با تعداد ۱۰ سنسور و $SNR = 20dB$

^۳Root Mean Square Error

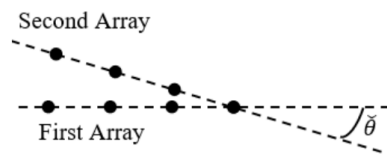
^۴fasT grOup sparsitY Based phAse Retrieval

Algorithm 3.1 Algorithm Summary (ToyBar)**Input:** $\mathbf{Y}$, $\mathbf{A}$, λ, γ .**Output:** $\mathbf{S}$ (reconstructed signal).**Initialization:** Set $\mathbf{S}^{(0)}$ as a random matrix, $\mathbf{B}^0 = \mathbf{S}^0, \beta^0 = 1$ **General steps:** for $q=0, \dots, Q$ 1. Calculate $\mathbf{C}^q = \mathbf{Y} \odot \mathbf{e}^{\text{jarg}(\mathbf{A}\mathbf{B}^q)}$ 2. Calculate $\mathbf{S}^{q+1}$ for $i=1, \dots, G$ **Gradient:** $\nabla F(\mathbf{b}_i^q) = 2(\mathbf{a}^H)_i(\mathbf{A}\mathbf{B}^q - \mathbf{C}^q)$ **Find** $\mathbf{s}_i^{q+1}$ as

$$\mathbf{s}_i^{q+1} = (\mathbf{b}_i^q - \lambda \nabla F(\mathbf{b}_i^q)) \max(1 - \frac{\rho\lambda}{\|\mathbf{b}_i^q - \lambda \nabla F(\mathbf{b}_i^q)\|_2}, 0)$$

where $\mathbf{b}_i^q$ is the i -th row of $\mathbf{B}^q$ **Update:** $\beta^{q+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4(\beta^q)^2}}{2}$,

$$\mathbf{B}^{q+1} = \mathbf{S}^{q+1} + \frac{\beta^q - 1}{\beta^{q+1}}(\mathbf{S}^{q+1}) - \mathbf{S}^q.$$

3. $q = q + 1$, go to 1.

شکل ۳.۳: آرایه خطی دوتایی از سنسورها

که در آن نرم صفر با نرم یک جایگزین شده‌است. همچنین ماتریس $\hat{\mathbf{A}}$ در واقع ترکیب دو ماتریس $\mathbf{A}_1$ و $\mathbf{A}_2$ است که به ترتیب مربوط به هر کدام از آرایه‌ها هستند و مانند ۲.۱۸ تعریف می‌شوند. پارامتر ρ نیز میزان تاثیر تنکی سیگنال را تنظیم می‌کند. به طور خلاصه ایده این کار در الگوریتم ۱.۳ بیان شده‌است.

۳.۴ جمع‌بندی مطالب فصل

در این فصل خوانندگان محترم با روش‌های تخمین زاویه ورود سیگنال به روش‌های ناهمدوس آشنا شدند. این روش‌ها به طور کلی به دو دسته تقسیم‌بندی شده‌اند. دسته‌ای که با استفاده از سیگنال مرجع به تخمین زاویه ورود می‌پردازند و دسته‌ای که بدون این سیگنال مسئله را حل کرده‌اند. با نوآوری این رساله نیز این مسئله بدون سیگنال مرجع حل شده‌است و با جزییات آن در فصل بعد آشنا می‌شویم.

فصل ۴

روش پیشنهادی

۴.۱ مقدمه

در این فصل به توضیح الگوریتم پیشنهادی این رساله می پردازیم. از مفاهیمی همچون کمینه سازی بیشینه سازی و بازیابی تنک که در فصل ۲ آشنا شده ایم، استفاده می کنیم.

۴.۲ ایده اصلی

همان طور که در زیر بخش ۲.۶.۲ دیدیم، می خواهیم پاسخی برای مسئله ۲.۲۰ با روش MM (۲.۳) بیابیم. لازم به ذکر است که در مسئله ما علاوه بر بردار مشاهدات اندازه خروجی سنسورها، مشاهدات علامت فاز آن ها نیز در تابع هزینه دیده می شود.

$$(4.1) \quad \text{Minimize} \quad F(\mathbf{x}; \mu) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{M-1} \left(y_i - |\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}|^2 \right)^2 + \lambda \mu \|\mathbf{x}\|_0 - \mu \sum_{i=0}^{M-1} \left(s_{R,i} \text{Re}(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}) + s_{I,i} \text{Im}(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}) \right).$$

که در اینجا $s_{R,i}$ و $s_{I,i}$ به ترتیب بخش های حقیقی و موهومی علامت فاز i امین سنسور هستند. μ نیز پارامتری است که در ابتدا عددی بزرگ است، و رفته رفته در هر مرحله کاهش می یابد. در نتیجه با کاهش پارامتر μ خروجی الگوریتم در نهایت پاسخی به مسئله تخمین NDOA است. اکنون با استفاده از روش MM (۲.۳) اصلاح

شده، به حل مسئله ۴.۱ می‌پردازیم. تابع جایگزین را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$(۴.۲) \quad C(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mu) \triangleq F(\mathbf{x}; \mu) + L\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_2^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{M-1} \left(|\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}|^2 - |\mathbf{a}_i^T \mathbf{z}|^2 \right)^2 - \sum_{i=0}^{M-1} |\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - \mathbf{a}_i^T \mathbf{z}|^2 \left(|\mathbf{a}_i^T \mathbf{z}|^2 - y_i \right),$$

که در اینجا L عددی اسکالر و مثبت، و $\mathbf{z}$ تخمین قبلی بردار $\mathbf{x}$ است. مشابه [۳۱]، تابع جایگزین در معادله ۴.۲ فقط نیاز دارد که یک کمینه محلی^۱ باشد، که این قضیه در پیوست‌های آ و ج اثبات شده‌است که اگر $L > L_{min}$ ، که در آن L_{min} یک حد پایین مناسب باشد، برقراری شرایطی که در ۲.۶ ذکر شده‌است تضمین می‌شود.

همچنین ما فضای Q_R را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$(۴.۳) \quad Q_R \triangleq \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_2^2 \leq R^2\}.$$

در نتیجه این تابع جایگزین که تعریف کردیم زمانی می‌تواند یک MM مناسب برای تابع ما باشد که دو شرط پایین را داشته باشد:

$$\bullet \quad C(\mathbf{x}, \mathbf{x}; \mu) = F(\mathbf{x}; \mu) - ۱ \quad (\text{همیشه برقرار})$$

$$\bullet \quad C(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mu) > F(\mathbf{x}; \mu) - ۲ \quad \text{برای تمام } \mathbf{x} \in Q_R \text{ و } \mathbf{x} \neq \mathbf{z}$$

قضیه ۱.۴. یک شرط کافی برای L تا شرط دوم بالا را برقرار کند رابطه زیر است:

$$(۴.۴) \quad L > 5M\|\mathbf{z}\|_2^2 + MR^2.$$

□

اثبات. به پیوست آ مراجعه کنید.

برای مینیمم کردن تابع جایگزین $C(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mu)$ نسبت به $\mathbf{x}$ ، با فرض دانستن بردار $\mathbf{z}$ در هر گام، ابتدا کمی این تابع را ساده‌سازی می‌کنیم. با جای‌گذاری (۴.۱) در (۴.۲)، و جای‌گذاری بخش‌های حقیقی و موهومی متغیر

¹local majorizer

علامت مختلط فازها، و کمی محاسبات ساده بدست می آوریم:

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mu) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{i=0}^{M-1} \left[(|\mathbf{a}_i^T \mathbf{z}|^2 - y_i) \left((\mathbf{a}_i^T \mathbf{z})^* a_{ik} x_k + (\mathbf{a}_i^T \mathbf{z}) a_{ik}^* x_k^* \right) - \mu \left(\frac{a_{ik} s_{R,i}}{2} + \frac{a_{ik} s_{I,i}}{2j} \right) x_k + \left(\frac{a_{ik}^* s_{R,i}}{2} - \frac{a_{ik}^* s_{I,i}}{2j} \right) x_k^* \right] + \mu \lambda |x_k|^0 + L |x_k - z_k|^2 \right] + h(\mathbf{z}, \mathbf{y}), \quad (4.5)$$

که در اینجا $|x_k|^0$ نشان دهنده نرم صفر است [۲۰] و به این شکل تعریف می شود که 0 برای $x_k = 0$ و 1 برای $x_k \neq 0$. علاوه بر آن، $h(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ شامل بقیه پارامترهایی است که از بسط $C(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mu)$ که فقط به $\mathbf{z}$ و $\mathbf{y}$ وابسته است، استخراج می شود (در نتیجه می توان وقتی $C(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mu)$ را روی $\mathbf{x}$ می خواهیم مینیمم کنیم، از آن ها صرف نظر کرد).

حال تعریف می کنیم:

$$q_k \triangleq \sum_{i=0}^{M-1} \left[(|\mathbf{a}_i^T \mathbf{z}|^2 - y_i) (\mathbf{a}_i^T \mathbf{z})^* a_{ik} - \mu \left(\frac{a_{ik} s_{R,i}}{2} + \frac{a_{ik} s_{I,i}}{2j} \right) \right], \quad (4.6)$$

و $\Delta_k \triangleq x_k - z_k$ ، حال می توان معادله (4.5) را بازنویسی کرد:

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mu) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(q_k x_k + (q_k x_k)^* + \lambda \mu |x_k|^0 + L |\Delta_k|^2 - q_k z_k - (q_k z_k)^* \right) + g(\mathbf{z}), \quad (4.7)$$

که در آن

$$g(\mathbf{z}) = h(\mathbf{z}) + \sum_{k=0}^{N-1} (q_k z_k + (q_k z_k)^*), \quad (4.8)$$

فقط به $\mathbf{z}$ وابسته است و می توان از آن صرف نظر کرد. اکنون با فرض ثابت بودن $\mathbf{z}$ ، تعریف می کنیم:

$$\bar{C}(\mathbf{x}) = \sum_k h_k(x_k), \quad (4.9)$$

به طوریکه:

$$h_k(x_k) \triangleq q_k x_k + (q_k x_k)^* + \lambda \mu |x_k|^0 + L |\Delta_k|^2 - q_k z_k - (q_k z_k)^*. \quad (۴.۱۰)$$

چون $\bar{C}(\mathbf{x})$ به پارامترهایی که فقط به x_k وابسته هستند، تجزیه می‌شود، کافی است که $h_k(x_k)$ را نسبت به x_k مینیمم کنیم.

در نتیجه مینیمم کننده $\bar{C}(\mathbf{x})$ با توجه به قضیه ۲.۴ بدست می‌آید.

قضیه ۲.۴. مینیمم کننده $\bar{C}(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mu)|_{\mathbf{z}, \mu \text{ fixed}}$ نسبت به $\mathbf{x}$ برابر است با:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{H} \sqrt{\frac{\mu \lambda}{L}} \left(\mathbf{z} - \frac{1}{L} \mathbf{q}^H \right), \quad (۴.۱۱)$$

که در آن $\mathbf{H}(\cdot)$ به عملگر آستانه سخت شناخته می‌شود.^۲

□

اثبات. مراجعه کنید به پیوست ب.

ما فضای خود را به $\|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{z}\|_2^2 \leq R^2$ محدود می‌کنیم تا مشابه آنچه در MM اتفاق می‌افتد، گارانتی کنیم در هر مرحله تابع هزینه غیرافزایشی است. این محدودسازی مشابه شرطی است که در قضیه ۱.۴ به طور همزمان برقرار می‌شود اگر پارامتر L به طور مناسب انتخاب شود که در قضیه بعدی مورد بررسی قرار گرفته است.

قضیه ۳.۴. برای انتخاب مناسب پارامتر L در الگوریتم MM که هر دو خاصیتی که در قضیه ۱.۴ در ناحیه Q_R که $R = \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{z}\|$ بررسی شد، برقرار باشد، پارامتر L باید در شرط زیر صدق کند:

$$L > L_{\min} = \gamma_{\min} M \|\mathbf{z}\|_2^2, \quad (۴.۱۲)$$

که $L_{\min}$ باند پایین هست و $\gamma_{\min}$ کوچکترین متغیر مثبتی است که در معادله چند جمله ای پایین جواب

²hard thresholding operator

می‌دهد:

$$\gamma^3 - 5\gamma^2 - 2\beta_1\mu N\gamma - 4\beta_2 > 0, \quad (4.13)$$

که در آن $\beta_2 = 1 + \frac{\|\mathbf{y}\|_2^2}{M\|\mathbf{z}\|_2^4}$ و $\beta_1 = \frac{\lambda}{M\|\mathbf{z}\|_2^4}$

اثبات. رجوع کنید به پیوست ج. □

در الگوریتم زیر زیربخش بعدی کل الگوریتم به طور خلاصه نمایش داده شده‌است که در آن از MM اصلاح شده و اطلاعات علامت فازها استفاده شده‌است (الگوریتم ۱.۴). در این الگوریتم پارامتر μ به صورت تابع نمایی کاهشی انتخاب شده‌است [۲۱]، [۳۲].

Algorithm 4.1 Proposed algorithm (MMSM) for non-coherent DOA estimation

Input observation $\mathbf{y}$, sign vector $\mathbf{s}$, steering matrix $\mathbf{A}$.

Initialization $n = 1, \mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}, \mu^{(0)}, \lambda, \alpha, \epsilon$.

repeat

- Calculate $\mathbf{q}$ from (6.4)
- Choose an appropriate L using (12.4)
- Update $\mathbf{x}^{(n)} = \bar{\mathbf{x}}$ using (11.4) with $\mathbf{z} = \mathbf{x}^{(n-1)}$ and $\mu = \mu^{(n)}$
- Update $\mu^{(n)} = \mu^{(0)}e^{-\alpha n}$
- Set $n \leftarrow n + 1$

until $\frac{\|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(n-1)}\|}{\|\mathbf{x}^{(n-1)}\|} < \epsilon$

۴.۳ آنالیز پیچیدگی

همان طور که می‌دانیم M تعداد سنسورها و فضا را به N قسمت مساوی (برای مثال ۱۸۰) تقسیم می‌کنیم. پیچیدگی این الگوریتم هم ارز با پیچیدگی پیدا کردن بردار $\mathbf{q}$ در رابطه (۴.۶) است. تعداد N ضرب برای پیدا کردن $\mathbf{a}_i^T \mathbf{z}$ و چون به تعداد سنسورها مقدار متفاوت برای i داریم، تا به اینجا $\mathcal{O}(NM)$ ضرب برای هر q_k نیاز است. در نتیجه برای محاسبه کل بردار $\mathbf{q}$ این الگوریتم به $\mathcal{O}(N^2M)$ عملیات نیاز دارد.

۴.۴ نتایج شبیه‌سازی

در این بخش عملکرد الگوریتم معرفی شده را با عملکرد ToyBar [۱۵] و GESPAR [۱۳] مقایسه می‌کنیم. در این شبیه‌سازی فرض شده‌است که سه سیگنال در زاویه‌های 30° ، 10° و 50° به جز منابع off-grid که در شکل ۴.۱ بیان شده‌است. در این حالات خاص، سیگنال‌ها در زوایای 30.3° ، 10.8° و 50.7° هستند. تعداد نمونه‌ها در زمان^۳ برای الگوریتم MMSM^۴ یک عدد و تعداد سنسورها مشابه [۱۵] برابر با ۲۱ عدد فرض شده‌است. سایر پارامترها به شکل $\mu^{(0)} = 0.1$ ، $\alpha = 0.1$ ، $\lambda = 0.01$ و $N = 180$ انتخاب شده‌اند.

خروجی به شکل جذر میانگین مربعات خطا^۵ حاصل از میانگین روی ۱۰۰ آزمایش مستقل نمایش داده شده‌است. در این بخش برای محاسبه RMSE فرض را بر دانستن درجه تنگی^۶ که با K نمایش می‌دهیم، می‌گذاریم. در حالتی که مقدار المان‌های غیر صفر در خروجی با مقدار K متفاوت باشد برای محاسبه RMSE، تعداد K المان از المان‌هایی که اندازه بزرگ‌تری دارند را انتخاب می‌کنیم. الگوریتم ToyBar برای شروع الگوریتم از ۵۰ ورودی تصادفی^۷ استفاده می‌کند در حالیکه الگوریتم MMSM با بردار تمام صفر آغاز می‌شود (البته در زیر بخش ۴.۵.۱ مختصراً درباره سایر حالت‌ها بحث می‌کنیم).

در نمودار اول، عملکرد تک snapshot الگوریتم MMSM با ۲۰ snapshots الگوریتم ToyBar در شرایط خطای فازی صفر، به طوری که SNR از ۵ تا ۲۵ تغییر می‌کند، مقایسه شده‌است (شکل ۴.۱). همانطور که از شکل پیداست عملکرد الگوریتم MMSM از سایر الگوریتم‌ها کاملاً بهتر است. در شکل ۴.۲ شرایط همان شرایط شکل ۴.۱ است، با این تفاوت که سیگنال‌های ورودی این بار off-grid هستند.

در جدول ۱.۴ تاثیر پارامتر N نشان داده شده‌است، که طبیعتاً با افزایش این پارامتر خطای الگوریتم کاهش می‌یابد.

در شکل‌های ۴.۳ و ۴.۴ عملکرد الگوریتم‌ها در شرایط وجود خطای فازی بررسی شده‌است. در این آزمایش، خطای فازی به وسیله ماتریس قطری D که المان‌های روی قطر آن $e^{j\phi}$ است که هر کدام از ϕ_i ‌ها به صورت مستقل از توزیع گاوسی تولید شده‌اند، مدل شده‌است [۱۳]. در نتیجه سیگنال دریافتی در این حالت $\mathbf{r} = \mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{n}$ می‌شود. محور افقی در این نمودار انحراف معیار^۸ خطای فازی ϕ_i ‌ها را نشان می‌دهد. با توجه به شکل، در

^۳Snapshots

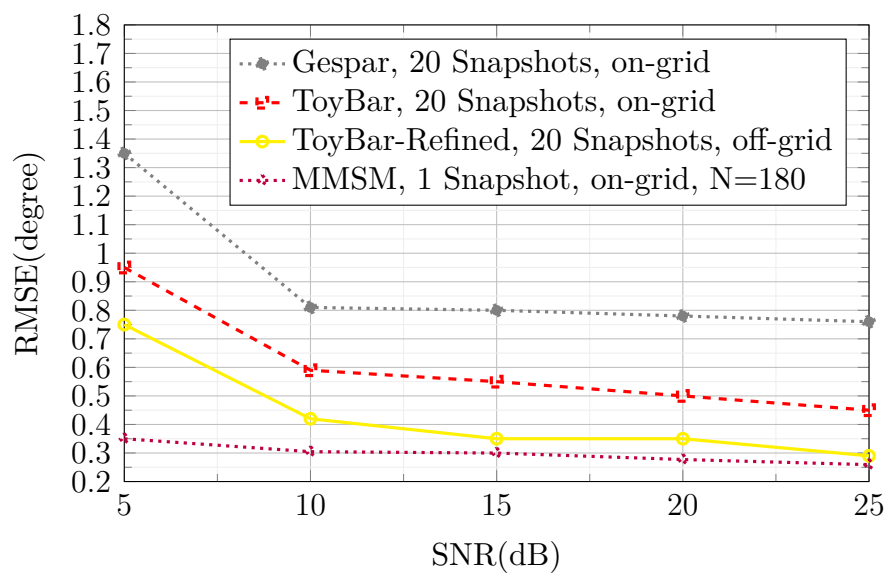
^۴Majorization-Minimization with Sign Measurements

^۵RMSE

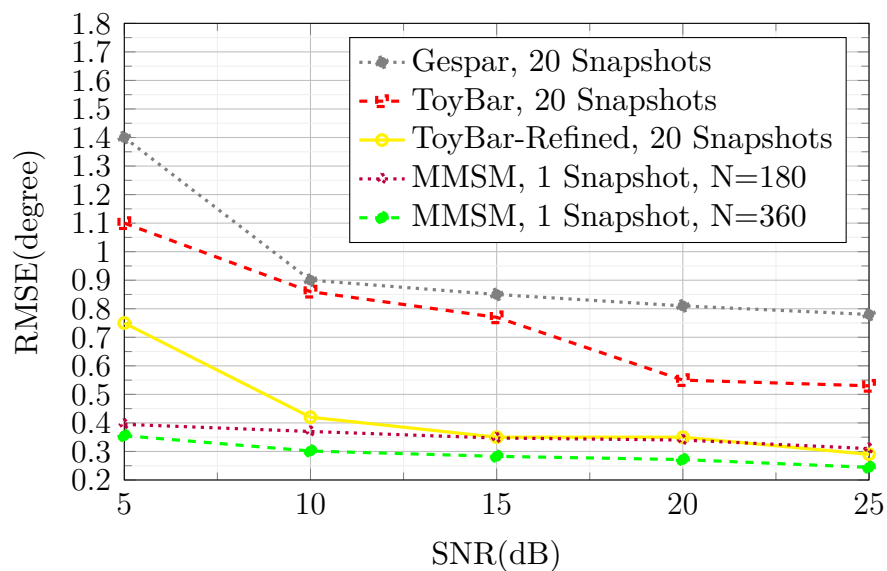
^۶Sparsity degree

^۷Random

^۸Standard deviation



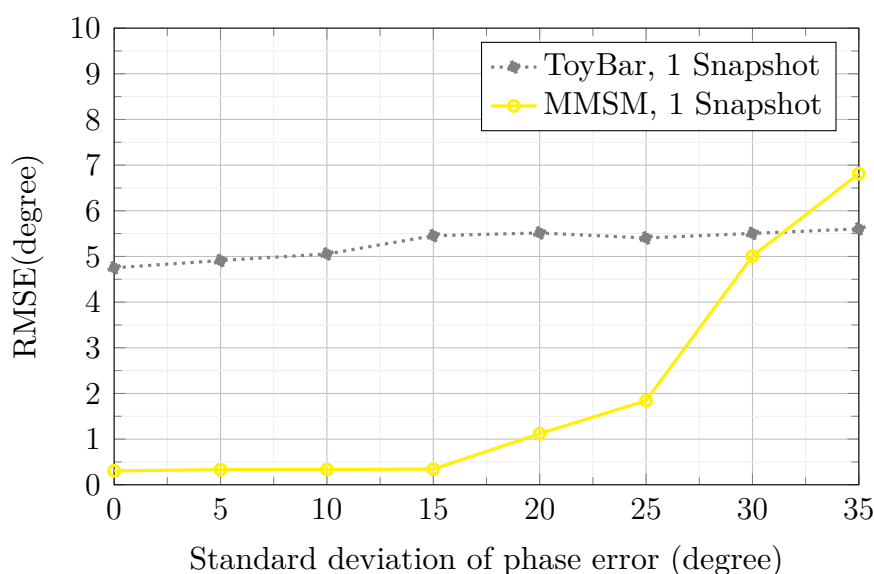
شکل ۴.۱: RMSE برحسب SNR های مختلف در شرایط خطای فازی صفر درجه و سیگنال‌های on-grid



شکل ۴.۲: RMSE برحسب SNR های مختلف در شرایط خطای فازی صفر درجه و سیگنال‌های off-grid

جدول ۱.۴: مقایسه عملکرد الگوریتم معرفی شده با تغییر پارامتر N مبتنی بر RMSE

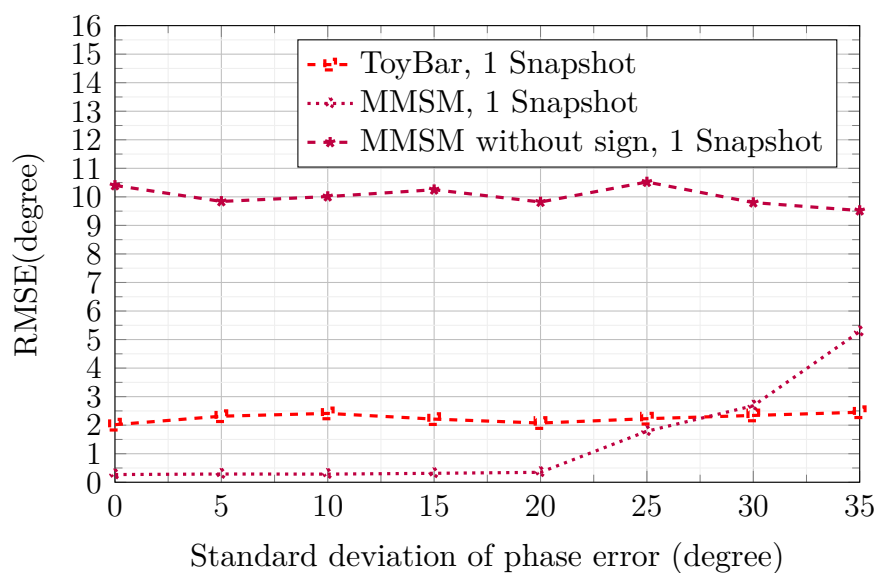
SNR=25	SNR=20	SNR=15	SNR=10	SNR=5	
0.312	0.341	0.347	0.371	0.395	N=180
0.261	0.277	0.299	0.305	0.350	N=360
0.246	0.254	0.258	0.304	0.339	N=720
0.243	0.251	0.257	0.298	0.318	N=1800



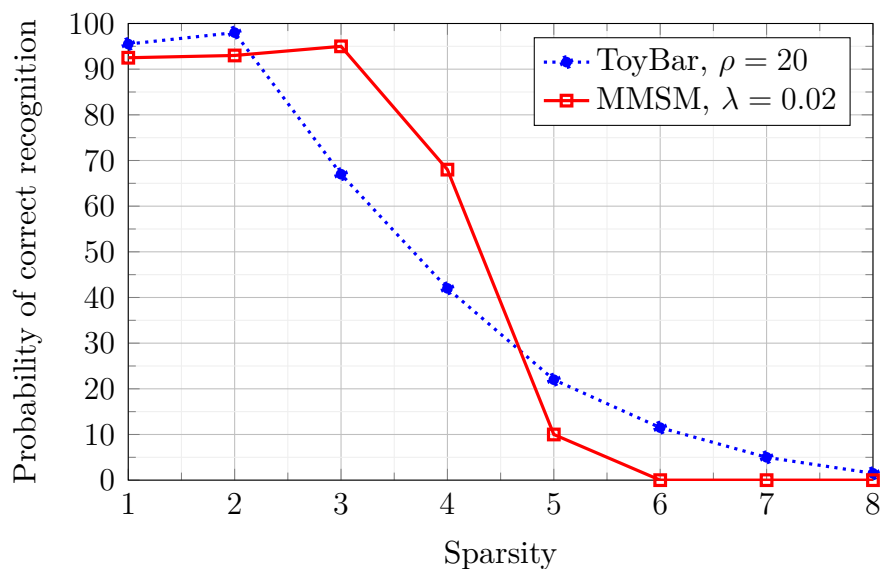
شکل ۴.۳: RMSE برحسب خطاهای فازی مختلف در SNR=10 dB که با توزیع گاوسی تولید شده‌اند.

در SNR=10dB الگوریتم MMSM در خطای فازی کمتر از 32° بهتر از الگوریتم ToyBar عمل می‌کند. همچنین این برتری در SNR=30dB و خطای فازی کمتر از 28° دیده می‌شود. همچنین تاثیر اطلاعات علامت در بهبود عملکرد الگوریتم MMSM نیز در این شکل دیده می‌شود.

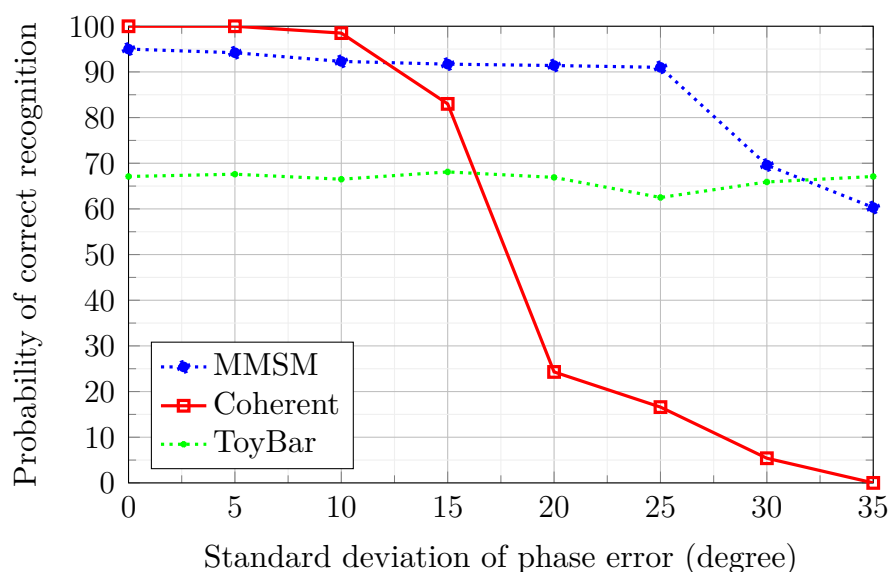
در آزمایش سوم احتمال تخمین درست (دقت) هر الگوریتم در بازیابی تعداد درست سیگنال‌های تابیده شده بررسی شده‌است. در این آزمایش تا خطای RMSE یک درجه قابل قبول بوده است. محور افقی در شکل ۴.۵ نشان دهنده درجه تنکی سیگنال یا همان تعداد سیگنال‌های تابیده شده به سنسورها است. همان طور که از شکل پیداست در $K=3$ و $K=4$ الگوریتم ارائه شده نتیجه بهتری دارد. در شکل بعدی، مشابه شکل قبل، تاثیر خطای فازی در دقت بازیابی درست تعداد سیگنال تابیده شده، بررسی شده‌است. همان طور که از شکل ۴.۶ پیداست، الگوریتم‌های همدوس مقاومت خود را در برابر خطای فازی از دست می‌دهند اما الگوریتم TOYBAR چون هیچگونه استفاده‌ای از اطلاعات فاز نمی‌کند، تاثیری نمی‌پذیرد. الگوریتم MMSM نیز مقاومت بیشتری



شکل ۴.۴: RMSE برحسب خطاهای فازی مختلف در $\text{SNR}=30 \text{ dB}$ که با توزیع گاوسی تولید شده اند.



شکل ۴.۵: مقایسه بین MMSM و ToyBar در موفقیت بازیابی تعداد درست سیگنال‌های تابیده شده به سنسورها.



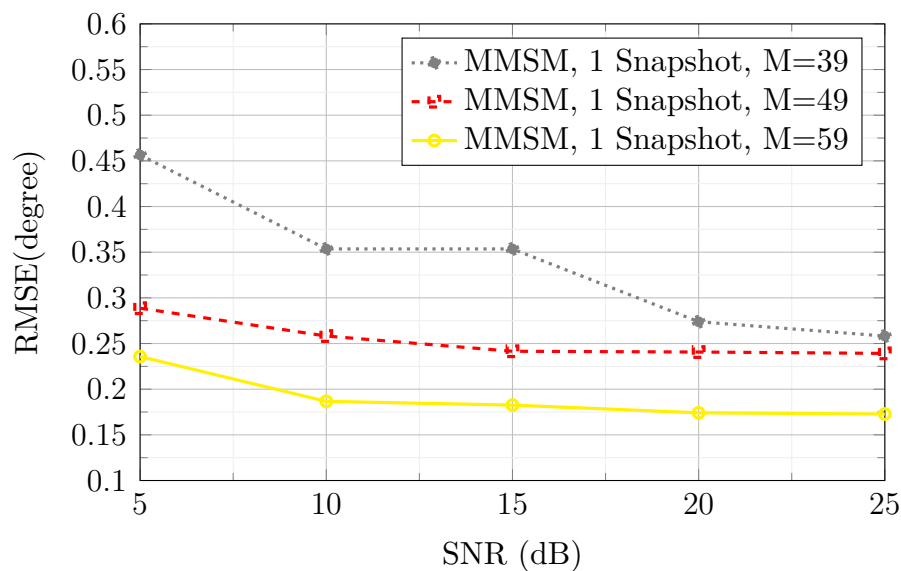
شکل ۴.۶: مقایسه بین یک الگوریتم هم‌دوس، MMSM و ToyBar در موفقیت بازیابی تعداد درست سیگنال‌های تابیده شده به سنسورها در حضور خطای فازی.

نسبت به خطای فازی دارد.

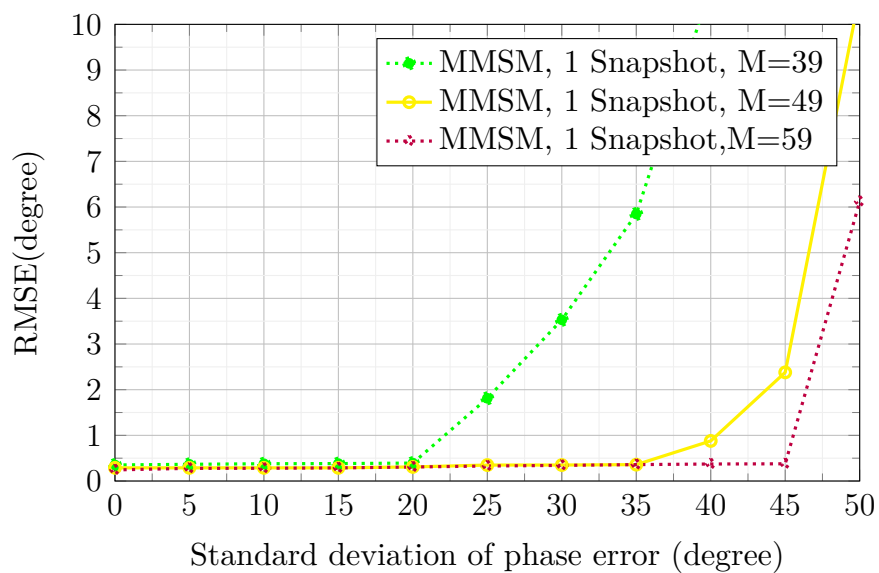
در آزمایش چهارم تاثیر تعداد سنسور را در دقت الگوریتم بررسی می‌کنیم. قطعاً هرچه تعداد سنسورها بیشتر شود، دقت الگوریتم بهتر می‌شود (شکل ۴.۷). همانطور که از شکل ۴.۸ دیده می‌شود، افزایش تعداد سنسورها مقاومت این الگوریتم در برابر خطای فازی را نیز بیشتر می‌کند.

در آزمایش پنجم تاثیر پارامتر α در میزان موفقیت الگوریتم در بازیابی تعداد سیگنال‌های ورودی سنجیده شده‌است. همان‌طور که در شکل ۴.۹ مشاهده می‌شود، فقط وقتی این پارامتر برابر با ۱۰ می‌شود، به مقدار ناچیزی افت عملکرد را مشاهده می‌کنیم. در سایر مقادیر تفاوت چشمگیری مشاهده نمی‌شود اما به‌هرحال در $\alpha = 0.1$ بهترین عملکرد را مشاهده می‌کنیم.

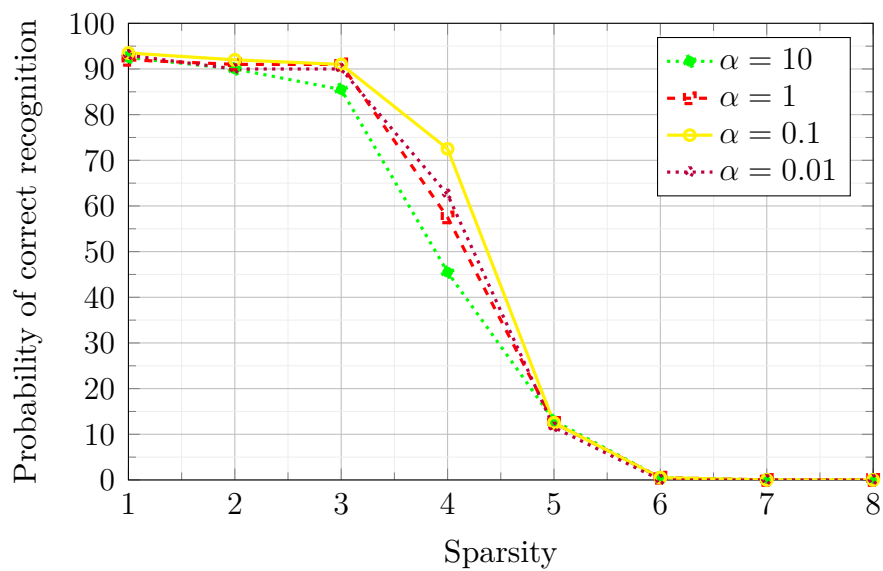
در آزمایش ششم تاثیر مقدار λ در خروجی سیگنال‌ها بررسی شده‌است (شکل ۴.۱۰). همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، هرچه مقدار این پارامتر بیشتر شود سیگنال‌های خروجی بیشتر تمایل دارند تا تنک باشند. در نتیجه هرچه مقدار λ بیشتر شود الگوریتم در حالت‌هایی که تعداد سیگنال‌های ورودی کمتر است، موفق‌تر عمل می‌کند.



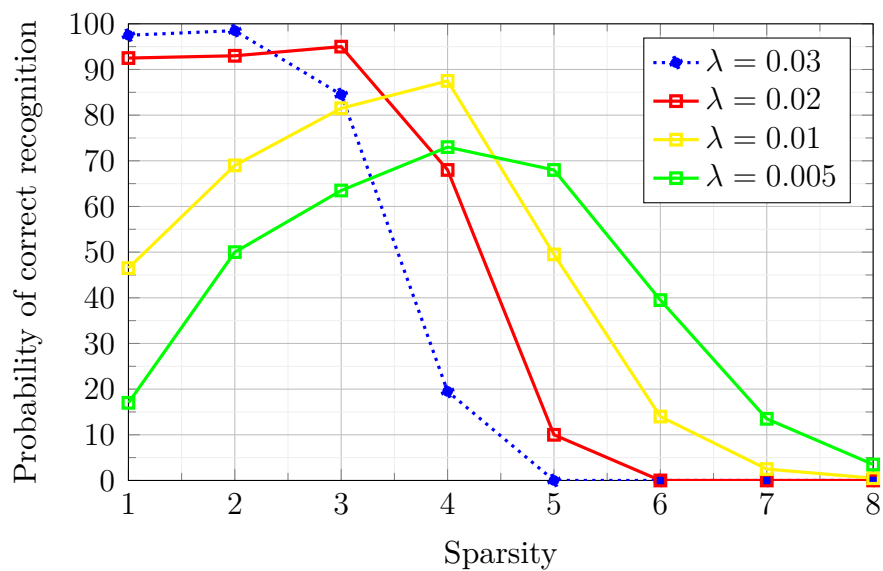
شکل ۴.۷: RMSE برحسب مقادیر مختلف M در SNR های مختلف



شکل ۴.۸: RMSE برحسب خطاهای فازی مختلف در $SNR=15$ dB که با توزیع گاوسی تولید شده اند.



شکل ۴.۹: تاثیر پارامتر α در موفقیت بازیابی تعداد سیگنال ورودی.



شکل ۴.۱۰: مقایسه بین مقادیر مختلف λ در MMSM در موفقیت بازیابی تعداد درست سیگنال‌های تابیده شده به سنسورها.

۴.۵ جزییات الگوریتم

در این بخش جزئیاتی برای شروع الگوریتم و نحوه به‌روزرسانی پارامترها مشاهده می‌کنیم و یک سری پیشنهاداتی که در این رساله استفاده شده، بیان شده‌است.

۴.۵.۱ شرایط اولیه

در گام اول چون بردار $\mathbf{z} = 0$ است، برای اجتناب از اینکه $\mathbf{x} = 0$ شود باید پارامترهای $\mu^{(0)}$ و $L^{(0)}$ را هوشمندانه انتخاب کرد. در این بخش منظور از L همان $L^{(0)}$ و μ همان $\mu^{(0)}$ است. اولاً برای L از رابطه ۹.ج در شرایطی که $\mathbf{z} = 0$ است، استفاده می‌کنیم:

$$L^3 - 2N\lambda\mu L - 2M^2\mu^2 > 0 \quad (۴.۱۴)$$

دوماً از رابطه ۴.۶ در گام اول می‌دانیم:

$$q_k^{(0)} = \sum_{i=0}^{M-1} \left[-\mu \left(\frac{a_{ik} s_{R,i}}{2} + \frac{a_{ik} s_{I,i}}{2j} \right) \right] \quad (۴.۱۵)$$

متغیر q_{max} را به شکل زیر تعریف می‌کنیم: $\max \left| \sum_{i=0}^{M-1} \left(\frac{a_{ik} s_{R,i}}{2} + \frac{a_{ik} s_{I,i}}{2j} \right) \right|$. بنابراین:

$$|q_k^{(0)}| \leq \mu q_{max} \quad (۴.۱۶)$$

از رابطه ۴.۱۱ می‌دانیم که رابطه زیر باید برقرار باشد:

$$\sqrt{\frac{\mu\lambda}{L}} \leq \frac{\mu q_{max}}{L} \quad (۴.۱۷)$$

بنابراین:

$$L \leq \frac{\mu q_{max}^2}{\lambda} \quad (۴.۱۸)$$

بنابراین یک حالت خاص برای انتخاب این پارامترها می‌تواند مقدار زیر باشد: $\mu^{(0)} = \frac{\lambda L^{(0)}}{q_{max}^2}$ پس از ۴.۱۴ داریم:

$$L^3 - 2N\left(\frac{\lambda}{q_{max}}\right)^2 L^2 - 2M^2\left(\frac{\lambda}{q_{max}^2}\right)^2 L^2 > 0 \quad (4.19)$$

بنابراین:

$$L^{(0)} > 2N\left(\frac{\lambda}{q_{max}}\right)^2 + 2M^2\left(\frac{\lambda}{q_{max}^2}\right)^2. \quad (4.20)$$

این‌ها فقط پیشنهاداتی برای مقادیر اولیه پارامترهای L و μ بودند. سایر مقادیر معتبری برای این پارامترها نیز وجود دارد.

۴.۵.۲ به‌روزرسانی پارامترها

پارامتر L که توسط رابطه ۴.۱۲ بعد از اولین گام به‌روزرسانی می‌شود. یک پیشنهاد برای به‌روزرسانی پارامتر μ که در این رساله استفاده شده‌است، رابطه زیر است:

$$\mu^{(n)} = \mu^{(0)} e^{-\alpha n} \quad (4.21)$$

که در آن α نشان‌دهنده نرخ کاهش پارامتر μ است و در طول الگوریتم ثابت است. همچنین تاثیر این پارامتر در شکل ۴.۹ بررسی شده‌است.

۴.۶ بررسی چند قضیه برای حالت خاص

اثبات چند قضیه که به اثبات همگرایی الگوریتم کمک می‌کند برای حالتی که μ کاهش می‌یابد، هدف این بخش نیست. اما برای حالت خاص تابع هزینه زیر این چند قضیه قابل اثبات است:

$$F_2(\mathbf{x}^{(n)}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{M-1} \left(y_i - |\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^{(n)}|^2 \right)^2 + \lambda \|\mathbf{x}^{(n)}\|_0 \quad (4.22)$$

در این تابع هزینه از نوشتن مقادیر $sign$ صرف نظر کرده‌ایم اما از آن‌ها در مقادیر اولیه الگوریتم کمک می‌گیریم. مقصود از $\mathbf{x}^{(n)}$ بردار $\mathbf{x}$ در گام n ام است. برای این تابع هزینه مشابه آنچه در فصل ۴ می‌توان نتیجه گرفت که پاسخ در هر گام به شکل زیر است:

$$\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{H} \sqrt{\frac{\lambda}{L}} (\mathbf{x}^{(n-1)} - \frac{1}{L} \mathbf{q}^H), \quad (4.23)$$

که در آن بردار $\mathbf{q}$ و پارامتر L به ترتیب از رابطه ۴.۶ و قضیه ۳.۴ به ازای $\mu = 0$ محاسبه می‌شوند. اکنون در چند قضیه به بررسی چند اثبات برای این تابع هزینه جدید می‌پردازیم.

قضیه ۴.۴. دنباله‌های $C_2(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n-1)})$ و $F_2(\mathbf{x}^{(n)})$ غیرافزایشی هستند.

اثبات.

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n-1)}) &\triangleq L \|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(n-1)}\|_2^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{M-1} \left(|\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^{(n)}|^2 - |\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^{(n-1)}|^2 \right)^2 \\ &- \sum_{i=0}^{M-1} |\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^{(n-1)}|^2 \left(|\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^{(n-1)}|^2 - y_i \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

از قضیه‌های ۱.۴ و ۳.۴ می‌دانیم که $W(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n-1)}) \geq 0$.

$$F_2(\mathbf{x}^{(n)}) = C_2(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n)}), \quad (4.25)$$

$$C_2(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n-1)}) = F_2(\mathbf{x}^{(n)}) + W(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n-1)}), \quad (4.26)$$

$$C_2(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n)}) - C_2(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n-1)}) = -W(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n-1)}) \quad (4.27)$$

و چون می‌دانیم $W(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n-1)}) \geq 0$ پس در نتیجه:

$$C_2(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n)}) \leq C_2(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n-1)}) \quad (4.28)$$

و با توجه به اینکه تابع هزینه $C_2(\mathbf{t}, \mathbf{x}^{(n-1)})$ بر حسب متغیر زمانی کمینه می‌شود که $\mathbf{t} = \mathbf{x}^{(n)}$ داریم:

$$C_2(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n-1)}) \leq C_2(\mathbf{x}^{(n-1)}, \mathbf{x}^{(n-1)}) = F_2(\mathbf{x}^{(n-1)}). \quad (4.29)$$

□

قضیه ۵.۴. $\forall \epsilon > 0, \exists N \forall n > N$ داریم: $\|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(n-1)}\|_2^2 \leq \epsilon$.

اثبات.

$$C_2(\mathbf{x}^{(n+1)}, \mathbf{x}^{(n)}) \leq C_2(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n)}) = C_2(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n-1)}) - W(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n-1)}), \quad (۴.۳۰)$$

$$W(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n-1)}) \leq C_2(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n-1)}) - C_2(\mathbf{x}^{(n+1)}, \mathbf{x}^{(n)}), \quad (۴.۳۱)$$

$$\sum_{n=1}^{N-1} W(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n-1)}) \leq C_2(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(0)}) - C_2(\mathbf{x}^{(N)}, \mathbf{x}^{(N-1)}). \quad (۴.۳۲)$$

از قضیه ۱.۴ داریم:

$$W(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n-1)}) \geq (L^{(n)} - 5M\|\mathbf{x}^{(n-1)}\|_2^2 - M\|\Delta^{(n)}\|_2^2)\|\Delta^{(n)}\|_2^2, \quad (۴.۳۳)$$

می‌توان در هر گام مقدار $L^{(n)}$ را به نحوی انتخاب کرد که داشته باشیم:

$$(L^{(n)} - 5M\|\mathbf{x}^{(n-1)}\|_2^2 - M\|\Delta^{(n)}\|_2^2) > constant > 0, \quad (۴.۳۴)$$

در نتیجه پس داریم:

$$\sum_{n=1}^{N-1} \|\Delta^{(n)}\|_2^2 \leq \frac{C_2(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(0)}) - C_2(\mathbf{x}^{(N)}, \mathbf{x}^{(N-1)})}{constant} < \epsilon \quad (۴.۳۵)$$

□

قضیه ۶.۴. برای هر نقطه ثابت^۹ به صورت $\hat{x}$ و با تعریف دو مجموعه به شکل $\Gamma_1 = \{k : \hat{x}_k = 0\}$ و $\Gamma_0 = \{k : \hat{x}_k \neq 0\}$

روابط زیر برقرار است:

$$|q_k| = 0, \quad \text{if } k \in \Gamma_1 \quad (۴.۳۶)$$

$$|q_k| \leq \sqrt{L\lambda}, \quad \text{if } k \in \Gamma_0 \quad (۴.۳۷)$$

^۹fixed point

۴.۷ جمع‌بندی مطالب فصل

در این فصل به ایده بررسی شده در این رساله پرداختیم. ابتدا با نوشتن روابط ریاضی، الگوریتمی جهت حل این مسئله بدست آورده و سپس اثبات‌های هر قضیه در بخش پیوست نوشته شده‌اند. آنالیز پیچیدگی محاسبات بررسی شده و با الگوریتم رقیب مقایسه شده‌است. همچنین نتایج شبیه‌سازی در شرایط مختلف بررسی شده و بحث شده‌است. مطالبی در ارتباط با شروع الگوریتم و در انتها یک سری قضایا در حالتی خاص بررسی شده‌است.

فصل ۵

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این رساله به بررسی مسئله تخمین ناهمدوس زاویه ورود سیگنال با اندازه و علامت فاز خروجی سنسورها پرداختیم. روشی جدید برای حل این مسئله با استفاده از روش MM بیان شد. برای حل ابهامات روش ناهمدوس، از علامت فاز خروجی سنسورها استفاده شد. همان‌طور که بیان شد، این روش نیازی به دانستن تعداد سیگنال‌های ورودی و سیگنال مرجع ندارد. نتایج شبیه‌سازی نشان‌دهنده برتری این روش در برخی شرایط نسبت به الگوریتم‌های پیشین است. در ادامه خلاصه‌ای از مطالب طرح شده در این رساله را مرور می‌کنیم:

- در فصل دوم با سیگنال‌های تنک و روش MM آشنا شدیم. تفاوت‌های روش گسسته‌سازی و بدون گسسته‌سازی زاویه ورود سیگنال نیز بیان شد. همچنین مقدمات ریاضیات تخمین همدوس و ناهمدوس زاویه سیگنال ورود نیز بیان شدند. در انتها ابهامات روش‌های ناهمدوس نیز ذکر شدند.
- در فصل سوم به روش‌های تخمین ناهمدوس زاویه ورود سیگنال پرداخته شد. برخی الگوریتم‌ها با جزییات بیشتر بیان شدند و الگوریتم آن‌ها نیز ذکر شدند.
- در فصل چهارم به نوآوری این رساله پرداخته شده‌است. الگوریتم جدید برای حل مسئله تخمین زاویه ورود در شرایطی که خطای فازی موجود است ارائه شده‌است. برخی اثبات‌های این روش در همین فصل و برخی دیگر در بخش پیوست‌ها ارائه شده‌است.

۵.۱ پیشنهادهایی برای پژوهش‌های آینده

اثبات همگرایی. یک سری قضایایی که در بخش ۴.۶ ارائه شد، برای حالتی است که پارامتر μ متغیر نباشد و از اطلاعات علامت در شروع الگوریتم استفاده شود اما می‌توان آن قضایا را در حالت متغیر بودن این پارامتر بررسی کرد که به عنوان کاری در آینده پیشنهاد می‌شود.

منابع نزدیک. یکی از مباحثی که امروزه بسیار محبوب شده‌است، مربوط به مکان یابی وقتی منابع به آرایه سنسورها نزدیک است. برای مثال در برخی مقالات مربوط به مخابرات بی سیم نسل ششم^۱ که در آن از RIS^۲ استفاده می‌شود. در این کاربرد ممکن است شرایط تغییر پیدا کند و مجبور به بازنویسی روابط هستیم. در نتیجه پیدا کردن روابطی که در شرایط منابع نزدیک نیز برقرار باشد، به عنوان کاری جدید در آینده پیشنهاد می‌شود.

پیدا کردن یک باند پایین RMSE به صورت تئوری برای MMSM. مشابه آنچه در [۳۰] و [۱۵] دیده می‌شود، می‌توان برای ایده این رساله نیز یک باند پایین به صورت تئوری اثبات کرد.

یادگیری ماشین و یادگیری عمیق. در بسیاری از مقالات هم‌چون [۳۳]، [۳۴] و [۳۵] از یادگیری ماشین^۳ و یادگیری عمیق^۴ در این کاربرد استفاده شده‌است اما می‌توان تمام پیشنهاداتی که در بالا ذکر شده‌اند را با این ابزارها پیاده‌سازی کرد.

^۱6th Generation

^۲Intelligent Reflecting Surfaces

^۳Machine learning

^۴Deep learning

پیوست‌ها

پیوست آ

شرط کافی برای L_{min}

(۱.۱)

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mu) - F(\mathbf{x}; \mu) = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{M-1} (|\bar{\mathbf{a}}_i \mathbf{x}|^2 - |\bar{\mathbf{a}}_i \mathbf{z}|^2)^2 - \sum_{i=0}^{M-1} |\bar{\mathbf{a}}_i \mathbf{x} - \bar{\mathbf{a}}_i \mathbf{z}|^2 (|\bar{\mathbf{a}}_i \mathbf{z}|^2 - y_i) + L \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_2^2,$$

که در آن $\bar{\mathbf{a}}_i \triangleq \mathbf{a}_i^T$. فرض کنید $\Delta = \mathbf{x} - \mathbf{z}$. چون $y_i \geq 0$ و $\|\bar{\mathbf{a}}_i\|_2 = 1$ ، یک باند پایین به شکل زیر بدست می‌آید:

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mu) - F(\mathbf{x}; \mu) \geq -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{M-1} (2\|\mathbf{z}\|_2 \|\Delta\|_2 + \|\Delta\|_2^2)^2 - \sum_{i=0}^{M-1} \|\Delta\|_2^2 \|\mathbf{z}\|_2^2 + L \|\Delta\|_2^2. \quad (1.2)$$

با اعمال نامساوی کوشی شوارتز^۱ بدست می‌آید:

$$\geq -\sum_{i=0}^{M-1} (4\|\mathbf{z}\|_2^2 \|\Delta\|_2^2 + \|\Delta\|_2^4) - \sum_{i=0}^{M-1} \|\Delta\|_2^2 \|\mathbf{z}\|_2^2 + L \|\Delta\|_2^2.$$

بنابراین با کمی ساده سازی روابط بالا داریم:

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mu) - F(\mathbf{x}; \mu) \geq (L - 5M\|\mathbf{z}\|_2^2 - M\|\Delta\|_2^2) \|\Delta\|_2^2. \quad (1.3)$$

¹Cauchy-Schwarz

در نهایت شرط کافی برای آنکه $C(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mu) - F(\mathbf{x}; \mu) > 0$ وقتی $R^2 \geq \|\Delta\|^2$ باید $L > 5M\|\mathbf{z}\|_2^2 + MR^2$ باشد.

پیوست ب

اثبات قضیه ۲.۴

برای پیدا کردن مینیمم $\bar{C}(x)$ ، کفایست که هر کدام از المان‌های $h_k(x_k)$ را مینیمم کنیم. برای این کار دو حالت را در نظر می‌گیریم:

۱. $x_k \neq 0$: داریم:

$$h_k(x_k) = q_k \Delta_k + (q_k \Delta_k)^* + L|\Delta_k|^2 + \mu\lambda \quad (\text{ب.۱})$$

چون z و همچنین z_k ثابت و شناخته شده فرض می‌شوند مینیمم کردن $h_k(x_k)$ نسبت به x_k برابر است با مینیمم کردن $h_k(x_k)$ روی $\Delta_k = x_k - z_k$. در نتیجه، مشتق مختلط $h_k(x_k)$ نسبت به Δ_k را می‌گیریم و برابر با صفر قرار می‌دهیم. که نتیجه می‌شود $\Delta_k = -\frac{1}{L}q_k^*$. در نتیجه مینیمم کننده $h_k(x_k)$ در این حالت می‌شود:

$$\bar{x}_k = z_k - \frac{1}{L}q_k^*. \quad (\text{ب.۲})$$

۲. $x_k = 0$: در این حالت داریم:

$$h_k(0) = L|z_k|^2 - q_k z_k - (q_k z_k)^*. \quad (\text{ب.۳})$$

در نتیجه اگر $h_k(\tilde{x}_k) \leq h_k(0)$ ، مینیمم کننده کل می شود $\bar{x}_k = z_k - \frac{1}{L}q_k^*$ در غیر این صورت، بدست می آید $\bar{x}_k = 0$ در نتیجه داریم:

$$\bar{x}_k = H_{\sqrt{\frac{\mu\lambda}{L}}}(z_k - \frac{1}{L}q_k^*)$$

که این قضیه را اثبات می کند.

پیوست ج

پیدا کردن L_{min} مناسب

$\frac{\|\mathbf{q}\|_2^2}{L^2} = \frac{1}{L^2} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left| \sum_{i=0}^{M-1} (|\bar{\mathbf{a}}_i \mathbf{z}|^2 - y_i) (\bar{\mathbf{a}}_i \mathbf{z})^* a_{ik} - \mu \left(\frac{a_{ik}^T R_{R,i}}{2} + \frac{a_{ik}^T I_{I,i}}{2j} \right) \right|^2 \right)$ با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز و با توجه به اینکه $\|\bar{\mathbf{a}}_i\|_2 = 1$ ، این معادله از بالا محدود می‌شود به:

$$\leq \frac{1}{L^2} \sum_{k=0}^{N-1} \left[M \sum_{i=0}^{M-1} \left(\left| |\bar{\mathbf{a}}_i \mathbf{z}|^2 - y_i \right|^2 |\bar{\mathbf{a}}_i \mathbf{z}|^2 \frac{2}{N} + \frac{\mu^2}{N} \right) \right]. \quad (\text{ج.۱})$$

بعد از ساده سازی داریم:

$$\frac{\|\mathbf{q}\|_2^2}{L^2} \leq \frac{2M}{L^2} \sum_{i=0}^{M-1} \left(|\bar{\mathbf{a}}_i \mathbf{z}|^6 + y_i^2 |\bar{\mathbf{a}}_i \mathbf{z}|^2 + \frac{\mu^2}{2} \right). \quad (\text{ج.۲})$$

در نهایت یک حد بالا می‌توان به شکل زیر تعریف کرد:

$$\frac{\|\mathbf{q}\|_2^2}{L^2} \leq \frac{2M^2}{L^2} (\|\mathbf{z}\|_2^6 + \frac{1}{M} \|\mathbf{y}\|_2^2 \|\mathbf{z}\|_2^2 + \frac{\mu^2}{2}). \quad (\text{ج.۳})$$

با توجه به کمینه کننده^۱ $\bar{x}$ ، ما می‌توانیم بنویسیم:

$$\bar{x}_k - z_k = \begin{cases} -\frac{1}{L} q_k^* & \text{if } |z_k - \frac{1}{L} q_k^*| \geq \sqrt{\frac{\mu\lambda}{L}} \\ -z_k & \text{if } |z_k - \frac{1}{L} q_k^*| \leq \sqrt{\frac{\mu\lambda}{L}}. \end{cases} \quad (\text{ج.۴})$$

¹ minimizer

به راحتی قابل اثبات است که:

$$|z_k|^2 \leq \frac{2\mu\lambda}{L} + 2\left|\frac{q_k}{L}\right|^2, \quad (\text{ج.۵})$$

$$\left|\frac{1}{L}q_k^*\right|^2 \leq \frac{2\mu\lambda}{L} + 2\left|\frac{q_k}{L}\right|^2. \quad (\text{ج.۶})$$

پس می توان نتیجه گرفت که به طور کلی:

$$|\bar{x}_k - z_k|^2 \leq \frac{2\mu\lambda}{L} + 2\left|\frac{q_k}{L}\right|^2. \quad (\text{ج.۷})$$

از طرفی با توجه به نتیجه پیوست آ رابطه زیر باید برقرار باشد:

$$L \geq 5M\|\mathbf{z}\|_2^2 + M\|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{z}\|_2^2. \quad (\text{ج.۸})$$

در نهایت شرط کافی به شکل زیر بدست می آید:

$$L > 5M\|\mathbf{z}\|_2^2 + M\left(\frac{4M^2}{L^2}\|\mathbf{z}\|_2^6 + \frac{4M}{L^2}\|\mathbf{y}\|_2^2\|\mathbf{z}\|_2^2 + \frac{2\lambda\mu N}{L} + \frac{2M^2\mu^2}{L^2}\right). \quad (\text{ج.۹})$$

که این به رابطه زیر منجر می شود:

$$L^3 - 5M\|\mathbf{z}\|_2^2L^2 - 2\beta_1\mu NM^2\|\mathbf{z}\|_2^4L - 4\|\mathbf{z}\|_2^6M^3\beta_2 > 0. \quad (\text{ج.۱۰})$$

با β_1 و β_2 که در ۳.۴ تعریف شده است.

- [1] Greco, M., Gini, F., Farina, A., and Timmoneri, L. Direction-of-arrival estimation in radar systems: moving winsdow against approximate maximum likelihood estimator. *IET Radar, Sonar Navigation*, 3(5):552–557, October 2009.
- [2] Thompson, J., Grant, P., Mulgrew, B., and Rajagopal, R. Generalized algorithm for doa estimation in a passive sonar. *IEE Proceedings F, Radar and Signal Processing*, 140(5):339–340, 1993.
- [3] Godara, L. Application of antenna arrays to mobile communications. ii. beam-forming and direction-of-arrival considerations. *Proceedings of the IEEE*, 85(8):1195–1245, 1997.
- [4] Dey, N., Ashour, A. S., Shi, F., and Sherratt, R. S. wireless capsule gastrointestinal endoscopy: Direction-of-arrival estimation based localization survey. *IEEE Reviews in Biomedical Engineering*, 10:2–11, April 2017.
- [5] Schmidt, R. Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, 10(3):276–280, 1986.
- [6] Capon, J. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis. *Proceedings of the IEEE*, 57(8):1408–1418, August 1969.
- [7] Roy, R. and Kailath, T. Esprit, estimation of signal parameters via rotation invariance techniques. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process*, 37(7):984–995, 1989.
- [8] Malioutov, D., Cetin, M., and Willsky, A. A sparse signal reconstruction prespective for source localization with sensor arrays. *IEEE Trans. Signal Processing*, 53(8):3010–3022, 2005.
- [9] Gurbuz, A., Cevher, V., and McClellan, J. Bearing estimation via spatial sparsity using compressive sensing. *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, 48(2):1358–1369, 2012.
- [10] Krieger, G. and Younis, M. Impact of oscillator noise in bistatic and multistatic sar. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 3(3):424–428, 2006.
- [11] Krieger, G. and Moreira, A. Spaceborne bi- and multistatic sar: potential and challenges. *IEE Proceedings - Radar, Sonar and Navigation*, 153:184–198, 2006.

- [12] Goffar, A. and Langholz, G. The performance of adaptive array in a dynamic environment. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-23(4):485–492, 1987.
- [13] Kim, H., Haimovich, A. M., and Eldar, Y. C. Non-coherent direction of arrival estimation from magnitude-only measurements. *IEEE Signal Process. Lett*, 22(7):925–929, 2015.
- [14] Shechtman, Y., Beck, A., and Eldar, Y. C. Gespar: Efficient phase retrieval of sparse signals. *IEEE Tran. Signal Processing*, 62(4):928–938, Feb 2014.
- [15] Wan, Z. and Liu, W. Non-coherent doa estimation via proximal gradient based on a dual-array structure. *IEEE Access*, 9:26792–26801, Feb 2021.
- [16] Delbari, M., Javaheri, A. H., Zayyani, H., and Marvasti, F. Non-coherent doa estimation via majorization-minimization using sign information. *IEEE Signal Processing Letters*, 29:892–896, March 2022.
- [17] Davis, G. *Adaptive Nonlinear Approximations*. Ph.D. thesis, New York University, 1994.
- [18] Mallat, S. and Zhang, Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(12):3397–3415, 1993.
- [19] Murray, J. F. and Kreutz-Delgado, K. An improved focuss based learning algorithm for solving sparse linear inverse problems. *Conf. Record of the Thirty-Fifth Asilomar Conf. on Signals, Systems and Computers*, p. 347–351, 2001.
- [20] Blumensath, T., Yaghoobi, M., and Davies, M. E. Iterative hard thresholding and l0 regularisation. *ICASSP*, April 2007.
- [21] Marvasti, F. and et al. Sparse signal processing using iterative method with adaptive thresholding (imat). *19th international conference in telecommunication (ICT 2012)*, pp. 1–6, April 2012.
- [22] Qiu, T., Babu, P., and Palomar, D. P. Prime: Phase retrieval via majorization-minimization. *IEEE Trans. Signal Process*, 64(19):5174–5186, Oct 2016.
- [23] Sun, Y., Babu, P., and Palomar, D. P. Majorization-minimization algorithms in signal processing, councinations, and machine learning. *IEEE Trans. Signal Process*, 65(3):794–816, Feb 2017.
- [24] Chellappa, Rama and Theodoridis, Sergios. *Array and statistical signal processing*. Academic Press, 2014.
- [25] Trees, Harry L. Van. *Optimum Array Processing*. John Wiley and Sons, 2002.
- [26] Dibiasse, Marco and Marchi, Luca De. Clusters of shaped ultrasonic transducers for lamb waves’ doa estimation. *MDPI AG*, 10, Nov 2020.
- [27] Marvasti1, Farokh, Amini, Arash, Haddadi, Farzan, Soltanolkotabi1, Mahdi, Khalaj, Babak Hossein, Aldroubi, Akram, Sanei, Saeid, and Chambers, Janathon. A unified approach to sparse signal processing. *Journal on Advances in Signal Processing*, 2012.

- [28] Hoshikawa, Toyoki, Nishimura, Toshihiko, Ohgane, Takeo, Ogawa, Yasutaka, and Hagiwara, Junichiro. Performance comparison of compressed sensing algorithms for doa estimation of multi-band signals. *15TH WORKSHOP ON POSITIONING, NAVIGATION AND COMMUNICATIONS (WPNC)*, 2018.
- [29] Zayyani, Hadi and Korki, Mehdi. Non-coherent direction of arrival estimation via frequency estimation. *arxiv*, 2016.
- [30] Jiang, Wei and Haimovich, Alexander M. Cramer-rao bound for non-coherent direction of arrival estimation in the presence of sensor location errors. *IEEE Signal Processing Letters*, pp. 1303 – 1307, 2017.
- [31] Xu, C., Lin, Z., Zhao, Z., and Zha, H. Relaxed majorization-minimization for non-smooth and non-convex optimization. *Proceedings of the Thirtieth AAAI Conference on Artificial Intelligence, AAI Press*, pp. 812–818, 2016.
- [32] Abtahi, A., Azghani, M., and Marvasti, F. An adaptive iterative thresholding algorithm for distributed mimo radars. *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, 55(2):523–533, April 2019.
- [33] Liu, Zhang-Meng, Zhang, Chenwei, and Yu, Philip S. Direction-of-arrival estimation based on deep neural networks with robustness to array imperfections. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 66(12):7315–7327, 2018.
- [34] Zhu, Wenli, Zhang, Min, Li, Pengfei, and Wu, Chenxi. Two-dimensional doa estimation via deep ensemble learning. *IEEE Access*, 8:124544–124552, 2020.
- [35] Chen, Min, Gong, Yi, and Mao, Xingpeng. Deep neural network for estimation of direction of arrival with antenna array. *IEEE Access*, 8:140688–140698, 2020.

Abstract

Direction of arrival (DOA) estimation has various applications in different areas such as wireless communication and signal processing in medical applications. Most of the previous methods were not based on digitalization, but the advantages of digitalized methods have been proved in recent decades. Furthermore, because of existing the phase error, we need to use the algorithms to find the solution with amplitude measurements. A solution method to this problem was introduced in 2015 for the first time, and then newer algorithms were proposed. However, most of them need reference signals to resolve the inherent ambiguity of the problem. By contrast, this dissertation not only does not use reference signals but also diminishes Root Mean Square Error (RMSE) compared to other algorithms using the sign of phase measurements. Although the phase values are inaccurate, the sign of real and imaginary parts of the measurements will most likely remain correct under limited phase errors. Furthermore, a new approach for solving the problem is proposed by employing a modified version of the Majorization-Minimization (MM) technique, without any prior information about the number of incident signals. Some theoretical analyses of our proposed algorithm are also provided in the paper. Finally, the simulation results are presented, demonstrating the efficiency of the proposed algorithm in comparison to some state-of-the-art methods in the literature.

Keywords: *DOA estimation, Non-coherent, Majorization-minimization, Sign of phase, Sparse recovery*



Sharif University of Technology
School of Electrical Engineering

M.Sc Thesis

**Non-coherent DOA Estimation via
Majorization-Minimization Using Sign
Information**

By

Mohamadreza Delbari

Supervisor:

Dr. Farrokh Marvasti

June 2022